
Google

THEORIE UND ANWENDUNG

DER

ELEMENTARTHEILER

VON

DR. P. MUTH.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

Vorwort.

Das Erscheinen dieses schon vor geraumer Zeit angekündigten Buches wurde leider durch Krankheit des Verfassers erheblich verzögert. Dass sich innerhalb dieser Zeit manche Anschauungen desselben geändert haben, wird man begreiflich finden; indessen wurde doch das in der Voranzeige entworfene Programm mit ganz geringen Modifikationen ausgeführt.

Was die Gesammtanlage des Buches anbelangt, so musste nach meiner Ansicht in einem Specialwerke über Elementartheiler den algebraischen und den arithmetischen Methoden möglichst gleichmässig Rechnung getragen werden; zeigen sich einerseits die letzteren als weittragender und so für die Weiterentwickelung unserer Theorie bedeutungsvoller, so sind andererseits die ersteren in hohem Maasse geeignet, zu einem tiefen Eindringen in das innere Wesen der hier obwaltenden Verhältnisse zu führen, und daher zugleich auch didaktisch von grossem Werthe.

Ohne auf Einzelheiten der Darstellung einzugehen, bemerke ich nur, dass wohl kein Zweifel darüber herrschen konnte, auf welche Weise bei der Entwickelung der sogenannten Weierstrass'schen Theorie vorzugehen war, nachdem Weierstrass selbst gelegentlich der Herausgabe seiner gesammelten Werke darauf hingewiesen hatte, dass die in seiner grundlegenden Arbeit vorhandene Lücke am Zweckmässigsten durch die Untersuchungen des Herrn Frobenius in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie von 1896 ausgefüllt werde. Die Schwierigkeit der Kronecker'schen Arbeiten über singuläre Schaaren ist bekannt; hier war Vieles strenger zu begründen und manche Lücke auszufüllen.

Eine Scheidung des Buches in einen theoretischen und einen die Anwendungen umfassenden Theil äusserlich herbeizuführen, wurde nicht versucht und wäre der ganzen Anlage desselben nach überhaupt auch kaum durchführbar gewesen. Dazu kommt, dass je nach dem Standpunkte, den man einnimmt, zuweilen der gleiche Gegenstand einmal als Theorie, einmal als Anwendung aufgefasst werden kann.

So zahlreiche Verwendung die in diesem Buche gegebenen Sätze über Elementartheiler ganzzahliger Systeme auch in der Zahlentheorie finden, so war es doch unmöglich, hier einen Gegenstand herauszugreifen, der ein in sich abgeschlossenes Ganze gebildet und zugleich ein prägnantes Beispiel für die Bedeutung derselben für diese Disciplin geboten hätte; doch darf in dieser Hinsicht wohl ausser auf die in der

Einleitung erwähnte Literatur auf Herrn Bachmann's Zahlentheorie (4. Theil, I. Abtheilung, Leipzig 1898) hingewiesen werden.

Aehnliche Schwierigkeiten, wie die eben aufgeführten, machten sich im Gebiete der linearen Differentialgleichungen bemerklich. Indessen war es hier möglich, eine kleinere, von Weierstrass selbst herrührende Anwendung zu geben, die für viele Arbeiten über Systeme von linearen Differentialgleichungen vorbildlich geworden ist.

Dagegen standen wohl abgegrenzte geometrische Anwendungen in grosser Menge zur Verfügung. Will man sich aber bei diesen nicht in endlosem Wiederholen von Einzelheiten erschöpfen, sondern eine umfassende und wirklich wissenschaftliche Darstellung bieten, so muss man, dem Vorgange von Herrn Segre folgend, fast durchweg die Betrachtungen im n-dimensionalen Raume vornehmen. Auch bei der im Buche durchgeführten Klassifikation der Collineationen musste sich der Verfasser zu diesem Vorgehen entschliessen; doch glaubt derselbe dadurch dem Anfänger keine besonderen Schwierigkeiten bereitet zu haben. Derselbe wird nach einander $n=1$, 2 und 3 setzen und so zu den gewohnten Vorstellungen kommen; ausserdem kann derselbe an die für die Fälle $n=1$, 2 und 3 überall angegebenen Normalformen direkt anknüpfen. Wie man sieht, nimmt die exakte Ausführung einer einzigen geometrischen Anwendung schon einen bedeutenden Raum in Anspruch, weshalb ich mich auf dieselbe beschränken musste. Doch kommt es wohl auch nicht auf die Zahl solcher Anwendungen an, sondern darauf, an einem geeigneten Beispiele das sonst überall verwandte Princip klar darzulegen. —

Von Anfang an hatte sich mein Unternehmen des besonderen Interesses einer Reihe hervorragender Kenner der Elementartheiler zu erfreuen; namentlich waren es die Herren Professoren Frobenius, Gundelfinger und Hensel, die, mit dem Gegenstande innigst vertraut und die Schwierigkeit seiner Bearbeitung wohl erkennend, stets bereit waren, mir ihre Unterstützung zu Theil werden zu lassen. Ihnen auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank zu sagen, ist mir eine angenehme Pflicht. Herrn Professor F. Meyer, der die Zusendung der Correcturbogen gütigst gestattete, verdanke ich eine Reihe werthvoller Literaturnachweise.

Schliesslich muss ich noch erwähnen, dass die Verlagsbuchhandlung meinen Wünschen betreffs der Ausstattung des Buches stets auf's Bereitwilligste entgegenkam.

Osthofen (Rheinhessen), 29. Mai 1899.

P. Muth.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Sowohl in der Analysis, als auch vornehmlich in der analytischen Geometrie tritt uns häufig das algebraische Problem entgegen, *zwei quadratische Formen φ und ψ von je n Variabelen durch eine lineare Substitution gleichzeitig in eine einfache oder kanonische* (Normal-) Form überzuführen.* Man denke z. B. nur an das analytisch-geometrische Problem des Falles $n = 3$ oder $n = 4$, wenn es sich darum handelt, zwei Kegelschnitte derselben Ebene oder zwei Flächen zweiter Ordnung auf ihre gegenseitige Lage zu untersuchen. Bekanntlich ist bei der Lösung des Problems das Verhalten der Determinante der durch φ und ψ bestimmten Schaar $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$ quadratischer Formen von ausschlaggebender Bedeutung. Im *allgemeinen Falle,* wo diese Determinante nicht identisch verschwindet und in n (nicht nur um eine Konstante) verschiedene Linearfaktoren zerlegt werden kann**, bietet dasselbe keine nennenswerthen Schwierigkeiten, und seine Lösung ist schon lange bekannt; man kann alsdann *beide Formen gleichzeitig als Aggregate von Quadraten n unabhängiger linearer Formen* darstellen.*** Ganz anders aber liegt die Sache, wenn die Determinante der Schaar, — die wir zunächst stets als nicht identisch verschwindend voraussetzen —, *nicht in lauter verschiedene lineare Faktoren* zerfällt. Alsdann haben wir eine Reihe verschiedener Fälle zu unterscheiden, und zwar kommt es darauf an, ob und wie oft ein mehrfacher Theiler jener Determinante gleichzeitig in allen Subdeterminanten $(n-1)^{\text{ten}}$, $(n-2)^{\text{ten}}$ u. s. w. Grades

---

* Vergl. über den Begriff „kanonische Form" die treffenden Bemerkungen Kronecker's: Ueber Schaaren von quadr. Formen, Berl. Monatsb. 1874, S. 72 (Ges. W. Bd. I, S. 367).

** Dass dieses wirklich der allgemeine Fall ist, bedarf des Nachweises. Vergl. Weierstrass, Ueber ein die homogenen Funktionen betr. Theorem, Berl. Monatsb. 1858, S. 208 (Ges. W. Bd. I, S. 233).

*** Hier sind wohl Cauchy, Sur l'équation, à l'aide de laquelle on déterm. les inégal. séculaires des mouvem. des planètes, Exercis. de math. (29) IV, S. 140 ff. und Jakobi, De binis quibusl. function. homog. sec. ordin. etc., Crelle's Journ. (34) Bd. 12, S. 1 ff., in erster Linie zu nennen. (Die eingeklammerten Zahlen bedeuten hier und im Flgdn. die beiden letzten Ziffern des Erscheinungsjahres des betr. Bandes.)

derselben auftritt. In den einfachsten Fällen $n = 2$, $n = 3$ sind die sich hier bietenden Möglichkeiten vielfach untersucht*, und auch für den Fall $n = 4$, der sich schon complicirter gestaltet, hat z. B. Sylvester** dreizehn verschiedene Fälle aufgezählt. Die Untersuchungen desselben erwiesen sich aber nicht als ausreichend, wenn die Formen φ und ψ von beliebig vielen Variabelen abhängig sind, und *vor Allem fehlte es noch an der Beantwortung der Frage, ob die Aufzählung der verschiedenen bei gegebenem n möglichen Fälle eine vollständige sei.*

Da gelang es K. Weierstrass, nachdem er schon 1858 in einem speciellen Falle der Lösung des allgemeinen Problems nahe gekommen war***, 1868 in seiner berühmten, *für die Theorie der Elementartheiler grundlegenden Arbeit:* „Ueber Schaaren bilinearer und quadratischer Formen"† nicht nur für zwei quadratische, sondern auch für zwei bilineare Formen φ, ψ *beliebig vieler Variabelen* das Problem der gleichzeitigen Transformation zweier Formen auf eine kanonische Form *bei beliebigem Verhalten der Determinante der durch die beiden Formen bestimmten Schaar* zu lösen und eine Methode anzugeben, die bei gegebenem n sich darbietenden Fälle *erschöpfend* aufzuzählen.

Weierstrass erreicht dieses dadurch, dass er die Determinante $|\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi|$ der Schaar $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$ in besonderer, durch das Auftreten der einzelnen Linearfaktoren von $|\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi|$ in den Subdeterminanten $(n-1)^{\text{ten}}$, $(n-2)^{\text{ten}}$ ... Grades dieser Determinante bedingten Weise in Faktoren zerlegt (**1**); er nennt jeden solchen Faktor einen Elementartheiler der Determinante der Schaar und zeigt zunächst, dass diese Elementartheiler (im Allgemeinen irrationale) *Invarianten* der Schaar sind. Dabei muss indessen hervorgehoben werden, dass die Elementartheiler *begrifflich* schon in der oben citirten Arbeit Sylvester's bei den Fällen $n = 3, 4$ auftraten, und dass Sylvester auch die Invariantennatur derselben erkannt hatte.††

Weierstrass führt nun die Formenschaar durch lineare Substitution in eine solche reducirte Formenschaar über, deren Bau im

* Man vergl. irgend ein grösseres Lehrbuch der analyt. Geom.

** Sylvester, Enum. of the cont. of lines and surf. of the sec. ord. u.s.w., Phil. Magaz. (51), 4. Serie vol. 1, S. 119. Rechnet man den Fall mit, wo φ und ψ nur um eine Konstante verschieden sind, so hat man 14 Fälle zu unterscheiden. Vergl. **66** (die stark gedruckten Zahlen bedeuten die Artikelnummern dieses Buches).

*** Weierstrass, l. c. S. 207 ff. (S. 233 ff.)

† Weierstrass, Berl. Monatsb. 1868, S. 310 ff. (Ges. W. Bd. II, S. 19 ff.)

†† Vergl. F. Meyer, Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie, Jahresb. der deutsch. Math.-Verein. von 1890—91 (92) Bd. I, S. 87. (Siehe auch Noether, J. J. Sylvester, Math. Ann. (98) Bd. 50, S. 133 ff.)

Wesentlichen von den Elementartheilern der Determinante $|\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi|$ abhängt. Daher kann man, wenn die Elementartheiler von $|\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi|$ bekannt sind, diese reducirte Schaar von verhältnissmässig einfacher Gestalt sofort angeben, d. h. *man kann eine kanonische Form des Paares φ, ψ sofort hinschreiben.*

Weiter aber: Stimmen für zwei Schaaren die Elementartheiler ihrer Determinanten überein, so sind sie zur selben reducirten Schaar äquivalent, mithin auch unter sich. Die Uebereinstimmung der Elementartheiler ihrer Determinanten ist daher nicht blos die *nothwendige*, sondern auch die *hinreichende* Bedingung für die Aequivalenz zweier Formenschaaren. Auf diese Weise hat Weierstrass sein bekanntes *Theorem über die Aequivalenz zweier Formenschaaren* bewiesen (s. § 6 und § 9 dieses Buches).

Endlich aber zeigte Weierstrass, anknüpfend an seine reducirte Schaar, dass man Formenschaaren bilden kann, deren Determinanten *vorgeschriebene Elementartheiler* besitzen. Dadurch gerade sind wir in Stand gesetzt, die kanonischen Formen der von einer gegebenen Anzahl von Variabelen abhängigen Formenpaare *systematisch und vollständig* anzugeben (§ 7 und § 9), und so erwächst aus der Weierstrass'schen Theorie ein *klassifikatorisches Princip ersten Ranges*, das besonders in der Geometrie die ausgiebigste Verwerthung gestattet.

Es ist daher nicht zu verwundern, wenn die Mathematiker sich desselben sofort bemächtigten, und zwar war es wohl zuerst F. Klein, der dasselbe (1868) in seiner Inauguraldissertation zur Klassifikation der Liniencomplexe 2ten Grades verwandte.* Dieser *geometrischen Anwendung* der Weierstrass'schen Theorie folgten zahlreiche andere, wie man aus der S. 223 zusammengestellten Literatur ersehen kann.

Eine schöne Anwendung seiner Theorie im Gebiete der *linearen Differentialgleichungen* gab Weierstrass selbst** (§ 16), an welche Arbeit sich eine Reihe anderer, von Horn, Sauvage u. s. w., anschliesst.*** Besonders wichtige Verwendung finden die Elementartheiler im zuletzt betrachteten Gebiete auch in der Theorie der Fundamentalgleichung, ein Gegenstand, den Heffter in seinem Buche über lineare Differentialgleichungen eingehend behandelt hat.†

* F. Klein, Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung 2ten Grades zwischen Liniencoord. auf eine kanonische Form, Inaug.-Diss., Berlin 1868 [abgedr. in Math. Ann. (84) Bd. 23].

** Weierstrass, Ges. Werke Bd. II, S. 75 ff.

*** Vergl. die S. 198 citirte Literatur.

† L. Heffter, Einleit. in die Theorie der lin. Differentialgl. mit einer unabh. Variab., Leipzig 1894, Kap. IX ff. Daselbst findet man auch die auf diesen Gegenstand bez. Literatur. Siehe auch S. 198 d. B.

Bemerkenswerth ist schliesslich, dass die Weierstrass'schen Elementartheiler durch Maurer eine interessante Verwendung in der *Gruppentheorie* gefunden haben.*

Neben diese Bestrebungen, die Weierstrass'sche Theorie nach den verschiedensten Richtungen hin zu verwerthen, stellen sich diejenigen, welche eine *durchaus strenge Begründung der Theorie selbst* zum Ziele haben. Die Weierstrass'schen Entwickelungen zeigten nämlich eine *Lücke*, deren Ausfüllung nicht gerade ganz einfach war, sodass sich um diesen Punkt eine ziemlich reiche Literatur gruppirt. Jene Entwickelungen werden nämlich erst dann correct, wenn der Nachweis erbracht werden kann, dass jede reguläre Subdeterminante eines Systems ganzer Grössen (3) mindestens eine reguläre Determinante als Subdeterminante enthält. Dann erst kann eine gewisse von Weierstrass vorgenommene, die Jakobi'sche Transformation der Schaar vorbereitende Umformung der zu reducirenden Schaar stets mit Sicherheit ausgeführt werden. Da dieser Beweis zunächst nicht erbringlich war, so schlug Stickelberger** (1874) ein *indirektes* Verfahren ein, um darzuthun, dass jede Schaar wirklich in die Weierstrass'sche reducirte Schaar transformirt werden kann. Indem ferner Darboux*** (1874) und Gundelfinger† (1876), welch' letzterem das Verdienst gebührt, die Weierstrass'sche Theorie zuerst weiteren Kreisen zugänglich gemacht zu haben, jene vorläufige Umformung der Schaar und die Jakobi'sche Transformation gleichsam verschmolzen, gelangten sie zwar zu einer neuen, theilweise kürzeren Darstellung unserer Theorie, die, wie Stickelberger†† (1879) in einer schönen Arbeit nachwies, so gegeben werden kann, dass sie an Strenge nichts zu wünschen übrig lässt, aber auch diese Methode blieb eine *indirekte*, indem zuerst an der reducirten Schaar die Bedeutung der Elementartheiler für die Reducirte nachgewiesen werden konnte, während Weierstrass die Elementartheiler *von vornherein* in die Rechnung einführt.

---

* Maurer, Münchener Berichte v. 1888, S. 103 ff.; derselbe, Crelle's Journ. (90) Bd. 107, S. 89 ff.

** Stickelberger, De probl. quod. ad duar. form. bilin. vel quad. transform. pertinente, Diss. inaug., Berol. 1874.

*** Darboux, Mém. sur la théor. algéb. des formes quadr. Liouville's Journ. Jahrg. 1874, Serie II, Bd. XIX, S. 347 ff.

† Gundelfinger in Hesse, Vorles. über analyt. Geometrie des Raumes, 3. Aufl., Leipzig 1876, Suppl. IV.

†† Stickelberger, Ueber Schaaren von bil. u. quad. Formen, Crelle's Journ. (79) Bd. 86, S. 20 ff.

Kronecker suchte die bewusste Lücke dadurch auszufüllen, dass er die Schaar einer allgemeinen linearen Transformation mit unbestimmten Koefficienten unterwarf*, ohne jedoch darthun zu können, dass dieses Verfahren auch bei Schaaren quadratischer Formen zulässig ist.

Da machte Frobenius** (1880) darauf aufmerksam, dass die beregte Schwierigkeit in der Weierstrass'schen Arbeit direkt gehoben werden könnte; Smith*** hatte nämlich den hierzu nöthigen Hilfssatz über reguläre Determinanten für ganzzahlige Systeme bereits 1861 bewiesen, und nun gab Frobenius a. a. O. einen neuen Beweis desselben, der mit einigen Modifikationen auch dann giltig bleibt, wenn man Systeme betrachtet, deren Elemente ganze Funktionen eines Parameters sind. Gerade darum handelt es sich aber für uns. Der Beweis des Hilfssatzes beruht auf *arithmetischen Methoden* und konnte später (1894), nachdem die Kronecker'sche Reduktion† eines Systems ganzzahliger Elemente bekannt geworden war, noch von Hensel†† bedeutend vereinfacht werden. Aber auch *algebraisch* ist derselbe beweisbar, wie Frobenius††† (1894) gezeigt hat, und zwar interessanter Weise mittelst einer Determinantenidentität, die gerade Kronecker[a] schon 1870 gefunden hatte (5).

Gestützt auf den Satz über reguläre Determinanten kann man nun die gewünschte vorläufige Umformung einer Schaar im Falle beliebiger bilinearer Formen durch eine *blosse Vertauschung der Variabelen*, im Falle der Symmetrie aber, wie Frobenius[b] gezeigt hat, mittelst einer Reihe *höchst einfacher congruenter Transformationen* erreichen. Dadurch ist eine, *allen Anforderungen an Strenge Genüge leistende direkte Begründung der* Weierstrass'*schen Theorie nicht*

---

* Kronecker, Berl. Monatsb. 1874, S. 215 (Ges. W. Bd. I, S. 391—392). Vergl. auch Frobenius, Ueber die Elementartheiler der Determinanten, Sitzb. d. Berl. Akad. 1894, S. 32.

** Frobenius, Theorie der lin. Form. mit ganz. Koeff., Crelle's Journ. (80) Bd. 88, S. 116.

*** Smith, On syst. of lin. indet. equations and congr., Phil. Transact. von 1861 (62), S. 318; On the arithm. invar. etc., Proc. of the L. math. soc. 1873, vol. IV, S. 237.

† Kronecker, Reduktion der Systeme mit n^2 ganzzahligen Elementen, Crelle's Journ. (91) Bd. 107, S. 135—136.

†† Hensel, Ueber reguläre Determin. u. s. w., Crelle's Journ. (94) Bd. 114, S. 25 ff.

††† Frobenius, Ueber die Elementartheiler der Det., Sitzb. der Berliner Akad. 1894, S. 33 ff.

a Kronecker, Crelle's Journ. (70) Bd. 72, S. 153.

b Frobenius, l. c. § 2.

nur bei Schaaren bilinearer, sondern auch bei Schaaren quadratischer Formen möglich (§ 6 und § 9).

Wir haben seither immer den Fall *singulärer Formenschaaren* ausgeschlossen; für solche Schaaren kann man aber die analogen Fragen, wie vorhin bei ordinären Schaaren, aufwerfen. Mit ihrer Beantwortung hat sich Kronecker* von 1868 an während einer Reihe von Jahren beschäftigt, konnte jedoch erst 1890 und 1891 zu einem abschliessenden Resultate gelangen.** Von besonderer Wichtigkeit, aber auch von besonderer Schwierigkeit ist auch hier der *Fall der Symmetrie.*

Die Untersuchungen von Weierstrass*** und Kronecker† über symmetrische Formenschaaren führten nun zu dem merkwürdigen Ergebnisse, dass zwei äquivalente Schaaren $\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi$ und $\lambda_1 \Phi + \lambda_2 \Psi$ von symmetrischen Formen stets auch congruent sind, in dem Sinne, dass eine in die andere durch *congruente*, von $\lambda_1 | \lambda_2$ unabhängige Substitutionen übergeführt werden kann, deren Determinanten nicht Null sind, oder kürzer gesagt, *dass die hinreichenden Bedingungen für die Aequivalenz zweier symmetrischen Formenschaaren zugleich diejenigen für die Congruenz derselben sind.* Das Gleiche gilt, wenn φ und Φ *symmetrische*, ψ und Ψ *alternirende* Formen††, und auch dann, wenn die Grundformen beider Schaaren *alternirend* sind††† (§ 9).

Den inneren Grund dieser Erscheinung vollständig aufzudecken gelang Frobenius (1896) in einer *die ganze Theorie der congruenten Transformationen bilinearer Formen neu gestaltenden Arbeit.*[a] Dieselbe

* Vergl. die Arbeiten desselben über Formenschaaren in den Berl. Monatsb. von 1868 u. 1874 (Ges. Werke Bd. I), insbesondere: Ueber Schaaren v. quadr. Form., Berl. Monatsb. 1874, S. 59 ff. (Ges. W. Bd. 1, S. 349 ff.) Vergl. auch Darboux, l. c. S. 383 ff.

** Kronecker, Algebr. Reduktion der Schaaren quadr. Formen, Sitzb. der Berl. Akad. 1890, S. 1225 ff.; derselbe, Algebr. Red. der Schaaren quadr. Formen, ebendaselbst 1890, S. 1375 u. 1891, S. 9 ff. und S. 33 ff.

*** Weierstrass, am S. VIII, Anm. 4 citirten Orte.

† Kronecker, in den eben citirten Arbeiten über quad. Formen.

†† Kronecker, Ueber die congr. Transf. der bil. Formen, Berl. Monatsb. 1874, S. 441—442 (Ges. Werke Bd. I, S. 477).

††† Frobenius, Theorie der lin. Form. mit ganz. Koeff., Crelle's Journ. (79) Bd. 86, § 7 u. § 13. Beweis hier nur für ordinäre Schaaren. Siehe das Flgd.

a Frobenius, Ueber die congr. Transf. der bil. Formen, Sitzungsb. der Berl. Akad. 1896, S. 7 ff. Als besonders wichtige Arbeiten über die congruenten Transformationen der bilinearen Formen seien hier diejenigen von Voss, Abhandl. der kgl. Bayerisch. Akad. d. Wiss. Bd. 17, S. 255 ff.; Münch. Berichte 1889 erwähnt. Ferner möge hier noch bemerkt werden, dass Voss gewisse Sätze von Frobenius,

gestattet u. A. die Hauptresultate der Kronecker'schen Untersuchungen über singuläre Schaaren quadratischer Formen, sowie über congruente Formen* abzuleiten, ohne die mühsamen Kronecker'schen Entwickelungen vornehmen zu müssen (§ 10).

Wir haben eben eine Reihe von Untersuchungen über *besondere Formenschaaren* erwähnt, wozu auch diejenigen über die Congruenz der Formen zu rechnen sind, da hier Schaaren mit conjugirten Grundformen in Betracht gezogen werden müssen (§ 10). Ohne auf die zahlreichen weiteren Untersuchungen über specielle Formenschaaren, welche auf Grund der Arbeiten von Kronecker und Weierstrass geführt werden können, und deren Anwendung hier näher einzugehen (§ 12—15, S. 223 Anm.), heben wir nur als besonders wichtig diejenigen über solche Schaaren hervor, deren Determinanten *nur lineare Elementartheiler* besitzen; hier kann die Schaar auf dieselbe Form gebracht werden, wie eine allgemeine Schaar (S. 93 u. 124), was Weierstrass für eine Schaar quadratischer Formen mit mindestens einer definiten, ordinären Grundform schon 1858 in der Eingangs erwähnten Arbeit** nachgewiesen hatte (§ 14). Im Falle die Determinante einer Schaar bilinearer oder quadratischer Formen *überhaupt lineare Elementartheiler* besitzt, kann man mittelst einer auf Cauchy*** zurückzuführenden Methode von der Schaar diejenigen elementaren Schaaren abspalten, welche den linearen Elementartheilern ihrer Determinante entsprechen. Dieses hat Stickelberger† in einer höchst interessanten, den übrigen algebraischen Untersuchungen über Elementartheiler gegenüber eine gewissermaassen isolirte Stellung einnehmenden Arbeit (1877) nachgewiesen (§ 15).

Die Untersuchungen von Kronecker und Weierstrass über die Aequivalenz von Formenschaaren sind in neuerer Zeit durch S. Kantor†† *verallgemeinert* worden. Während die Untersuchungen jener sich auf solche Formen beziehen, deren Koefficienten lineare Formen *zweier* Variabelen vorstellen, erstrecken sich diejenigen von

---

Siacci, Stickelberger u. Stieltjes über Elementartheiler aus einer einzigen Determinantenidentität herleitete. Hierüber, sowie über den Zusammenhang der Voss'schen Arbeiten mit den betr. Arbeiten von Frobenius siehe F. Meyer, a. S. VIII citirten Orte, S. 115 ff.

* Kronecker, l. c. S. 397 ff. (S. 428 ff.)

** Weierstrass, Berl. Monatsb. 1858, S. 207 ff. (Ges. W. Bd. I. S. 233 ff.)

*** Cauchy, Exerc. de math. (29) IV, S. 140 ff.

† Stickelberger, Ueber reelle orthog. Substitution, Progr. der eidgen. polyt. Schule für das Schuljahr 1877/78 (erstes Halbjahr), Zürich 1877, § 7.

†† S. Kantor, Theorie der Aequivalenz von linearen ∞^{λ}-Schaaren bilinearer Formen, Sitzb. der math.-phys. Klasse der k. B. Akad. der Wissensch. zu München von 1897 (98), S. 367 ff.

S. Kantor auf Formen, deren Koefficienten lineare Formen *beliebig vieler* Variabelen sind. Dabei entsprechen den Weierstrass'schen Elementartheilern gewisse invariante Zahlen, die S. Kantor als Elementarzahlen bezeichnet.

Der Begriff „Elementartheiler" lässt sich mit Leichtigkeit auf solche Systeme von beliebig hohem Range* ausdehnen, deren Elemente *ganze Zahlen* oder *ganze Funktionen einer oder mehrerer Variabelen beliebig hohen Grades* oder *ganze Grössen eines Körpers von Zahlen oder algebraischen Funktionen* sind** (S. 19).

Schon 1861 hatte Smith*** bei ganzzahligen Systemen Zahlen (Invarianten) in Betracht gezogen, die später von Frobenius† als ϱ^{te} Elementartheiler des betreffenden Systems bezeichnet wurden. Indem man dieselben in Faktoren zerlegt, die Potenzen verschiedener Primzahlen sind, erhält man die sämmtlichen Elementartheiler des Systems. Ausser Smith selbst war es namentlich Frobenius, der mit diesem wichtigen zahlentheoretischen Begriffe operirte†† und ihn auf Systeme der eben beschriebenen Art ausdehnte.††† Eine fundamentale Eigenschaft der ϱ^{ten} Elementartheiler ist die, *dass für jedes System der ϱ^{te} Elementartheiler durch den $(\varrho-1)^{ten}$ theilbar ist*, (wo ϱ nicht grösser als der Rang des Systems ist), wie dies im speciellen Falle aus den Weierstrass'schen Untersuchungen hervorging.[a] Von grösster Bedeutung aber wurden diese Elementartheiler für die *Theorie der Composition von Systemen* aus ganzen Elementen. Denn es ergab sich,

---

* *Irrthümlicher Weise* wird die Einführung des Begriffes und Namens „Rang" allgemein Kronecker zugeschrieben; Frobenius vielmehr hat, nachdem er u. A. schon in seiner Abhandlung „Ueber das Pfaff'sche Problem", Crelle's Journ. von *1877*, Bd. 82, S. 230 ff., *den umfassendsten Gebrauch von diesem Begriffe gemacht hatte,* demselben später den Namen „Rang" beigelegt (Crelle's Journ. *1879*, Bd. 86, S. 1 u. S. 148). Kronecker, der die grosse Bedeutung dieses Begriffes sofort erkannt hatte, fand auch die Benennung höchst zweckmässig gewählt und adoptirte dieselbe (Sitzb. der Berl. Akad. *1884*, S. 1078).

** Bei unserer Darstellung von Kronecker's Untersuchungen über singuläre Schaaren (§ 8 u. § 10) müsste die Erweiterung des Begriffes „Elementartheiler" oben an früherer Stelle erwähnt werden. Kronecker vermied es, in den betreffenden Arbeiten von Elementartheilern zu sprechen, was in der Abhandlung in den Sitzungsb. der Berl. Akad. 1890, S. 1225 ff. so auffallend geschieht, dass man auf eine gewisse Absichtlichkeit schliessen möchte.

*** Smith, Phil. Transact. 1861 (62), S. 293.

† Frobenius, Crelle's Journ. (79) Bd. 86, S. 148.

†† Frobenius, Crelle's Journ. (79) Bd. 86, S. 140 ff.; ebendaselbst (80) Bd. 88, S. 96 ff.

††† Frobenius, l. c. und Sitzungsb. der Berl. Akad. 1890, S. 31 ff.

a Vergl. die S. 7 zu Satz I citirte Literatur.

dass der ϱ^{te} Elementartheiler eines Systems, das durch Composition zweier oder mehrerer Systeme gleicher Art entsteht, ein ganzes Vielfaches des ϱ^{ten} Elementartheilers jedes dieser Systeme ist; dieser Hauptsatz wurde zuerst von Frobenius allgemein bewiesen.*

Naturgemäss wird man die Frage aufwerfen, ob das zuletzt ausgesprochene Theorem auch *umkehrbar* ist. In der That ist für Systeme aus *ganzen Zahlen oder ganzen Funktionen einer Variabelen* die Umkehrbarkeit desselben einfach nachweisbar**, dagegen ist bis jetzt noch nicht gezeigt worden, dass jenes Theorem sich auch in den übrigen Fällen umkehren lässt. (Vergl. S. 231.)

Nehmen wir speciell an, zwei quadratische Systeme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, deren Elemente lineare ganze Funktionen einer Variabelen λ seien, hätten die Beschaffenheit, dass ihre ϱ^{ten} Elementartheiler übereinstimmten. Dann kann nach dem eben Gesagten jedes aus dem andern durch Composition mit Systemen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ erzeugt werden, deren Determinanten, wie sich weiterhin ergiebt, nicht Null und nicht von λ abhängig sind, und zwar werden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ *auf rationalem Wege* gefunden. Da nun, wie Frobenius (1879) weiter zeigen konnte, im Falle die Determinanten der Systeme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht identisch Null sind, die Systeme $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ rational so bestimmt werden können, dass nicht nur ihre Determinanten, sondern ihre Elemente selbst von λ unabhängig sind***, so war hierdurch zum ersten Mal der Weierstrass'sche Fundamentalsatz über die Aequivalenz von Schaaren bilinearer Formen *auf durchweg rationalem Wege* bewiesen.†

Die *arithmetischen*, auf der Kronecker'schen Reduktion basirenden Methoden wurden namentlich von Hensel†† weitergebildet; derselbe zieht auch Systeme in Betracht, deren Elemente ganze oder *gebrochene* Grössen eines Körpers von algebraischen Zahlen oder Funktionen sind, wobei der Begriff „Elementartheiler“ abermalige Erweiterung erfahren muss.††† Die Hauptsätze über Elementartheiler bleiben

---

* Vergl. die S. 16 zu Satz II citirte Literatur.

** Vergl. z. B. Frobenius, Crelle's Journ. (80) Bd. 88, S. 114.

*** Vorausgesetzt, dass der Koefficient der höchsten Potenz von λ in der Determinante von $\mathfrak{A}$ bez. $\mathfrak{B}$ nicht Null ist. Der Satz gilt dann aber auch sofort ohne diese Beschränkung (89).

† Frobenius, Crelle's Journ. (79) Bd. 86, l. c. § 13. Vergl. auch Landsberg, Ueber Fundamentalsyst. und bil. Formen, Crelle's Journ. (96) Bd. 116, S. 331 ff.

†† Hensel, Crelle's Journ. (94) Bd. 114, S. 25 ff.; derselbe, Ueber die Elementarth. componirter Systeme, l. c. S. 109 ff.

††† Hensel, Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der algebr. Funkt. einer Variabelen, Crelle's Journ. (96) Bd. 115, S. 254 ff.

auch für solche Systeme bestehen (§ 18). Von besonderem Interesse sind hier solche Systeme, bei denen die Elemente jeder Zeile conjugirte algebraische Grössen des betreffenden Körpers von algebraischen Funktionen einer Variabelen sind. Man kann dann die ϱ^{ten} Elementartheiler *rational* bestimmen und mit ihrer Hilfe die Verzweigung der Riemann'schen Fläche, welche zu der den Körper constituirenden algebraischen Gleichung gehört, unmittelbar angeben.* Damit sind wir zu den neuesten *funktionentheoretischen Anwendungen* der Elementartheiler gelangt.

---

* Hensel, Ueber die Ordnungen der Verzweigungsp. einer Riemann'schen Fläche, Sitzb. der Berl. Akad. 1895, S. 933ff.; derselbe, Ueber die Verzweigungsp. der 3- und 4-blätterigen Riemann'schen Flächen, ebendaselbst S. 1103ff. — Eine Reihe weiterer auf diesen Gegenstand bezüglicher Arbeiten von Fischer, Hensel u. Landsberg findet man in Crelle's Journ. (97) Bd. 117 u. 118.

---

§ 1. Definition und allgemeine Eigenschaften der Elementartheiler.

1. Sind zwei bilineare Formen

$$A = \sum a_{ik} x_i y_k, \quad B = \sum b_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

von je $2n$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $y_1, y_2, \ldots y_n$ vorgelegt, bedeuten ferner $\lambda_1 | \lambda_2$ homogene binäre, von den x_i und y_i unabhängige Veränderliche, so wird die Gesammtheit der durch den Ausdruck

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B$$

dargestellten Formen als eine Schaar (ein Büschel) von bilinearen Formen bezeichnet; A und B heissen die Grundformen der Schaar, die Determinante

$$\sum \pm (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 b_{11})(\lambda_1 a_{22} + \lambda_2 b_{22}) \ldots (\lambda_1 a_{nn} + \lambda_2 b_{nn})$$

heisst die Determinante der Schaar.

Die Determinante der Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ werde mit D bezeichnet; D ist eine homogene ganze Funktion n^{ten} Grades der Veränderlichen $\lambda_1 | \lambda_2$. Falls D nicht identisch Null ist, kann es daher in ein Produkt von n Faktoren zerlegt werden, deren jeder in $\lambda_1 | \lambda_2$ homogen und linear ist. Analoges gilt für jede Subdeterminante des Systems von D.*

Nun sei D nicht identisch Null, und

$$a \lambda_1 + b \lambda_2 = p$$

ein Linearfaktor von D, ferner bedeute l_ϱ den Exponenten der *höchsten* Potenz, zu welcher erhoben p in *allen* Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades von D enthalten ist; in D ist p zur Potenz l_n enthalten.

Der Definition gemäss tritt der Faktor p^{l_ϱ} in allen Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades auf, und zwar in *mindestens einer* derselben genau zur l_ϱ^{ten} Potenz. Im grössten gemeinschaftlichen Theiler aller Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades von D tritt also p zur Potenz l_ϱ auf. Die Zahlen l_ϱ sind positive, ganze Zahlen bez. Null.

---

* Eine Subdeterminante des Systems einer Determinante D wird im Folgenden auch kurz als eine Subdeterminante von D bezeichnet werden.

2. Für die soeben eingeführten Zahlen l_ϱ besteht die Ungleichung

(1) $$l_{\varrho+1} > l_\varrho,$$

wenn $l_\varrho > 0$ ist. Entwickelt man nämlich eine Subdeterminante $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grades von D nach den Elementen einer Reihe (Zeile oder Spalte), so enthält jedes Glied des Aggregates eine Subdeterminante ϱ^{ten} Grades als Faktor; also ist die Subdeterminante $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grades mindestens durch die l_ϱ^{te} Potenz von p theilbar. Aber auch ihre partiellen Ableitungen nach λ_1 und λ_2 sind durch p^{l_ϱ} theilbar. Denn jede derselben stellt ein Aggregat von Produkten vor, deren jedes aus einer der Grössen a_{ik} bez. b_{ik} und einer Subdeterminante ϱ^{ten} Grades von D besteht; also ist in der That $l_{\varrho+1} > l_\varrho$. Für $l_\varrho = 0$ ist selbstverständlich $l_{\varrho+1} \geqq l_\varrho$.

Ist $l_\varrho = 0$, so ist wegen (1) auch

$$l_{\varrho-1} = l_{\varrho-2} = \cdots = l_1 = 0.$$

Ist daher $l_{\varrho+1} > 0$, $l_\varrho = 0$, so ist

(2) $$0 = l_1 = l_2 = \cdots = l_\varrho < l_{\varrho+1} < l_{\varrho+2} < \cdots < l_n.$$

Zufolge dieser Eigenschaft der Zahlen l_ϱ *ist der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten* $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ *Grades durch denjenigen aller Subdeterminanten* ϱ^{ten} *Grades theilbar.*

Nunmehr definiren wir n Zahlen $e_1, e_2, \ldots e_n$ durch die n Gleichungen

(3) $$e_n = l_n - l_{n-1},\quad e_{n-1} = l_{n-1} - l_{n-2}, \ldots e_1 = l_1.$$

Diese n Zahlen sind nach (2) *positive ganze Zahlen* bez. *Null.* Aus (3) folgt

$$l_n = e_1 + e_2 + \cdots + e_n;$$

also ist

$$(a\lambda_1 + b\lambda_2)^{l_n} = (a\lambda_1 + b\lambda_2)^{e_1}(a\lambda_1 + b\lambda_2)^{e_2}\ldots(a\lambda_1 + b\lambda_2)^{e_n}.$$

Jeder einzelne der Faktoren, in welche soeben $(a\lambda_1 + b\lambda_2)^{l_n}$ zerlegt wurde, heisst ein **Elementartheiler*** der Determinante der Schaar bilinearer Formen, wenn sein Exponent *von Null verschieden* ist. — Wir denken uns die analoge Zerlegung für jeden in D auftretenden linearen Theiler ausgeführt; alsdann wird, abgesehen von einem von $\lambda_1 | \lambda_2$ unabhängigen Faktor, die Determinante *D das Produkt ihrer sämmtlichen Elementartheiler.* Sind, in irgend einer Reihenfolge geschrieben,

$$(a_i\lambda_1 + b_i\lambda_2)^{e_i}\ \ (i = 1, 2, \ldots m;\ m \leqq n)$$

die sämmtlichen Elementartheiler von D, so ist

$$e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_m = n.$$

* Weierstrass, Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften in Berlin (gekürzt B M), 1868, S. 321. (Ges. Werke Bd. II, S. 21.)

Die Bedeutung gerade dieser Zerlegung von D für die Theorie der bilinearen Formen kann erst an späterer Stelle zu Tage treten. Zunächst wollen wir hier ein *Beispiel für die Zerlegung einer Determinante in Elementartheiler* geben. Es sei z. B.

$$A = a_1 x_1 y_1 + a_1 x_2 y_2 + a_1 x_3 y_3 + a_2 x_4 y_4,$$
$$B = b_1 x_1 y_1 + b_1 x_2 y_2 + b_1 x_3 y_3 + b_2 x_4 y_4$$

und nicht

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2.$$

Dann ist

$$D = \begin{vmatrix} a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 \end{vmatrix}$$
$$= (a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2)^3 (a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2).$$

Für den Linearfaktor $a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2$ von D wird

$$l_4 = 3, \quad l_3 = 2, \quad l_2 = 1, \quad l_1 = 0,$$

also

$$e_4 = 1, \quad e_3 = 1, \quad e_2 = 1, \quad e_1 = 0;$$

zum Lineartheiler $a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2$ gehören also die Elementartheiler

$$a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2, \quad a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2, \quad a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2.$$

Dagegen gehört zu $a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2$ nur der Elementartheiler

$$a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2.$$

Daher ist in Elementartheiler zerlegt:

$$D = (a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2)(a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2)(a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2)(a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2).$$

In unserem Beispiele haben alle Elementartheiler von D den Exponenten 1.

3. Wir wollen, zu allgemeineren Betrachtungen zurückkehrend, den Fall näher untersuchen, *wo die Elementartheiler von D*, die zu einem bestimmten linearen Theiler von D gehören, *alle den Exponenten Eins haben.*

Damit der l-fach in D auftretende lineare Faktor p bei der Zerlegung von D in Elementartheiler stets den Exponenten 1 erhält, muss p in allen Subdeterminanten

$(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von D zur Potenz $l-1$,
$(n-2)^{\text{ten}}$ Grades von D zur Potenz $l-2$,
. . . .
$(n-l+1)^{\text{ten}}$ Grades von D zur Potenz 1

auftreten (2). Dagegen haben wegen (1) die Subdeterminanten $(n-l)^{\text{ten}}$ Grades nicht alle den Faktor p.

Ist umgekehrt für einen Linearfaktor p von D

$$l_{n-l+1} = 1,$$

so muss wegen (1) $l_{n-l} = 0$ und

$$l_{n-l+2} = 2, \quad l_{n-l+3} = 3, \ldots l_{n-1} = l-1$$

sein, damit $l_n = l$ wird. Dann ist aber nach (3)

$$e_n = e_{n-1} = \cdots = e_{n-l+1} = 1.$$

Also:

Damit ein l-fach in D auftretender Linearfaktor bei der Zerlegung von D in Elementartheiler nur Exponenten 1 erhält, ist nothwendig und hinreichend, dass er im grössten gemeinschaftlichen Theiler aller Subdeterminanten $(n-l+1)^{ten}$ Grades linear enthalten sei.

Die oben definirten Zahlen e_ϱ haben die *fundamentale Eigenschaft, dass*

$$e_n \geqq e_{n-1} \geqq e_{n-2} \geqq \cdots \geqq e_2 \geqq e_1$$

ist. Der Beweis hierfür wird im Folgenden erbracht werden, wobei sich zugleich ein neuer Beweis für die Ungleichung (1) ergeben wird. Die Zahlen l_ϱ haben also die Eigenschaft, dass nicht nur die *ersten Differenzen*

$$e_\varrho = l_\varrho - l_{\varrho-1} \; (\varrho = 1, 2, \ldots n; \; l_0 = 0),$$

sondern auch die *zweiten Differenzen*

$$e_\varrho - e_{\varrho-1} \; (\varrho = 1, 2, \ldots n; \; e_0 = 0)$$

niemals negativ sind.

Indem wir im Vorhergehenden (Artikel 1—3) durchweg

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad b_{ik} = b_{ki}, \quad x_i = y_i$$

setzen, erhalten wir an Stelle von Betrachtungen über bilineare Formen von $2n$ Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $y_1, y_2, \ldots y_n$ solche über *quadratische Formen* von n Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$. Man hat überall für „bilineare Form" zu setzen „*quadratische Form*"; im Uebrigen bleibt dann das Gesagte vollständig bestehen. Der Ausdruck $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ heisst also eine Schaar von quadratischen Formen, u. s. w.

4. Im Vorhergehenden haben wir den Begriff „Elementartheiler" für solche Determinanten eingeführt, deren Elemente lineare Formen zweier Veränderlichen $\lambda_1 | \lambda_2$ waren. *Dieser Begriff lässt sich aber folgendermassen noch beträchtlich erweitern:*

Es bedeute

$$|a_{ik}| \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

die Determinante eines Systems von n^2 Elementen*

* Die folgenden Betrachtungen gelten auch für nicht quadratische Systeme, denn solche können durch Zufügen von Reihen mit lauter Elementen Null in quadratische verwandelt werden. Diese Nullreihen sind aber ohne Einfluss auf obige Entwickelungen.

$$\begin{matrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nn} ; \end{matrix}$$

diese Elemente seien jetzt entweder *ganze Zahlen* — die Null mit eingeschlossen — oder *ganze Funktionen einer oder mehrerer Variabelen.* Ferner bedeute p im ersten Falle eine Primzahl, im zweiten eine lineare bez. irreduktibele Funktion. Unter ϱ verstehen wir eine ganze, positive Zahl, die nicht grösser ist, als der Rang* r des Systems der a_{ik}. Endlich bedeute l_ϱ den Exponenten der höchsten Potenz, zu welcher erhoben p in allen Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades des Systems der a_{ik} auftritt. Da jedenfalls

(4) $$l_\varrho \geqq l_{\varrho-1} \quad (\varrho = 1, 2, \dots r;\ l_0 = 0)$$

ist [vergl. den Beweis von Ungleichung (1)], so ist jede der Zahlen

(5) $$e_\varrho = l_\varrho - l_{\varrho-1} \quad (\varrho = 1, 2, \dots r)$$

positiv und ganz, bez. Null. Dann heisst nach Weierstrass und Frobenius** jede der Grössen

$$p^{e_\varrho} \quad (\varrho = 1, 2, \dots r),$$

für welche e_ϱ nicht Null ist, ein **Elementartheiler des Systems der Elemente** a_{ik}, oder auch, wenn $r = n$ ist, **der Determinante** $|a_{ik}|$; p heisst die Basis, e_ϱ der Exponent des Elementartheilers p^{e_ϱ} vom e_ϱ^{ten} Grade. Ein Elementartheiler ersten Grades heisst auch ein linearer Elementartheiler.***

Wir werden im Folgenden allgemein den grössten gemeinschaftlichen Theiler aller Subdeterminanten σ^{ten} Grades unseres Systems

---

* Sind nicht alle Subdeterminanten r^{ten} Grades unseres Systems Null bez. identisch Null, aber alle Subdeterminanten $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades, so heisst r der Rang des Systems der a_{ik} oder auch, wenn das System ein quadratisches ist, der Determinante $|a_{ik}|$. Ist $|a_{ik}| \neq 0$ (nicht gleich Null) bez. $\not\equiv 0$ (nicht identisch Null), so setzt man $r = n$; sind alle Elemente a_{ik} Null bez. identisch Null ($\equiv 0$), nimmt man $r = 0$. (Frobenius, Crelle's Journ. [79] Bd. 86, S. 1 und S. 148.)

** Weierstrass, l. c. und Frobenius, Sitzungsb. der Akad. der Wissensch. in Berlin (kurz citirt: SB), 1894, S. 33.

*** Kronecker nannte (BM 1874, S. 226 [Ges. Werke, S. 405]) einen Elementartheiler ersten Grades einen einfachen Elementartheiler, und demgemäss hat man für $e_\varrho > 1$ von mehrfachen Elementartheilern gesprochen. Wir ziehen obige bequemere Bezeichnung mit Frobenius (Crelle's Journ. [79] Bd. 86, S. 162) vor, die das Wort „einfach" zur anderweitigen Verwendung frei lässt. [Vergl. 6 c).]

der a_{ik} — auch Determinanten σ^{ten} Grades des Systems genannt — mit D_σ bezeichnen und, falls $\sigma > r$ ist,

$$D_\sigma = 0$$

gesetzt denken. Für $r = n$ ist natürlich $D_n = |a_{ik}|$.

Der Definition gemäss steckt p in D_ϱ zur Potenz l_ϱ, speciell in D_r zur Potenz l_r. Da nach (5)

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_r = l_r$$

ist, so erkennt man, dass D_r *das Produkt sämmtlicher Elementartheiler unseres Systems ist* (vergl. Art. 2).

Da p in D_ϱ zur Potenz l_ϱ auftritt, nach (4) aber $l_\varrho \geqq l_{\varrho-1}$ ist, *so ist sicher D_ϱ durch $D_{\varrho-1}$ theilbar.* Daher sind die Ausdrücke

$$(6) \qquad E_r = \frac{D_r}{D_{r-1}}, \quad E_{r-1} = \frac{D_{r-1}}{D_{r-2}}, \cdots E_1 = D_1$$

ganze Zahlen bez. ganze Funktionen. Man setzt noch

$$E_{r+1} = E_{r+2} = \cdots = E_n = 0$$

und nennt

$$E_1, E_2, \ldots E_n$$

bez. den **ersten, zweiten, ... n^{ten} Elementartheiler*** **des Systems der** a_{ik}, oder auch, wenn $r = n$ ist, **der Determinante** $|a_{ik}|$.

Der ϱ^{te} Elementartheiler (ET) enthält p zur Potenz e_ϱ. *Zerlegt man also $E_1, E_2 \ldots E_r$ bez. in Faktoren, die (von Null verschiedene) Potenzen verschiedener Primtheiler sind, so erhält man sämmtliche ET des Systems.*

5. Sowie nun D_ϱ durch $D_{\varrho-1}$, so ist auch E_ϱ durch $E_{\varrho-1}$ theilbar. Denn wir werden jetzt das Fundamentaltheorem beweisen, dass

$$e_\varrho \geqq e_{\varrho-1}$$

ist. Zuvor wir den Beweis beginnen, muss noch ein neuer Begriff eingeführt werden:

Nach der Definition giebt es mindestens eine Determinante ϱ^{ten} Grades unseres Systems, die genau durch die l_ϱ^{te} Potenz von p theilbar ist. Jede Determinante ϱ^{ten} Grades des Systems, welche den Primtheiler p genau zur Potenz l_ϱ, also zur selben Potenz, wie der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Determinanten ϱ^{ten} Grades desselben enthält, heisst nach Frobenius** eine in Bezug auf p reguläre Subdeterminante ϱ^{ten} Grades des Systems. Unter den Subdeterminanten eines gewissen Grades giebt es mindestens eine in Bezug auf einen

* Vergl. S. 13, Anm.**

** Frobenius, l. c. S. 32.

bestimmten Primtheiler reguläre. Wenn im Folgenden kurz von einer regulären Determinante gesprochen wird, so ist stets eine in Bezug auf p reguläre gemeint. Bei $r = n$ ist die Determinante $|a_{ik}|$ für jedes p regulär.

Wir werden nun die drei folgenden Sätze beweisen, die unter sich in engem Zusammenhange stehen:

*1) Jede reguläre Determinante ϱ^{ten} Grades des Systems der a_{ik} $(\varrho > 1)$ enthält mindestens eine reguläre Determinante $(\varrho - 1)^{ten}$ Grades des Systems als Subdeterminante.**

*2) Jede reguläre Determinante $(\varrho - 1)^{ten}$ Grades des Systems der a_{ik} $(\varrho > 1)$ ist in einer regulären Determinante ϱ^{ten} Grades als Subdeterminante enthalten.***

I. Es ist stets

(7) $$e_\varrho \geqq e_{\varrho-1} \quad (\varrho = 2, 3, \ldots r),$$

oder

$$l_\varrho - 2l_{\varrho-1} + l_{\varrho-2} \geqq 0 \quad (\varrho = 2, 3, \ldots r;\ l_0 = 0);$$

in Worten:

Der ϱ^{te} Elementartheiler eines Systems ist stets durch den $(\varrho - 1)^{ten}$ theilbar.***

Dass Satz I für $\varrho = 2$ gilt, ist evident; denn jedes Element a_{ik} enthält p zur Potenz l_1, also tritt p in jeder Determinante zweiten Grades mindestens zur Potenz $2l_1$ auf; daher ist

$$l_2 \geqq 2l_1, \quad l_2 - l_1 \geqq l_1$$

und somit

$$e_2 \geqq e_1.$$

Wir nehmen nun an, es sei für ein bestimmtes ϱ bewiesen, dass in *jedem* Systeme von Elementen a_{ik} der oben beschriebenen Art

(8) $$e_1 \leqq e_2 \leqq e_3 \ldots \leqq e_{\varrho-1}$$

sei, und zeigen, dass dann für dieses ϱ nicht nur $e_{\varrho-1} \leqq e_\varrho$, also der Satz I giltig ist, sondern dass auch für dieses und für jedes kleinere ϱ die beiden ersten Sätze 1) und 2) gelten. Da wir nun oben sahen, dass in

---

* Smith, Phil. Trans. 1861 (62), vol. 151, S. 318; Proc. of the Lond. math. soc. 1873, vol. 4, S. 237. Stickelberger, Crelle's Journal (79) Bd. 86, S. 38—39. Frobenius, ebendaselbst (80) Bd. 88, S. 116. Hensel, daselbst (95) Bd. 114, S. 52 ff. Frobenius, SB 1894, S. 33.

** Hensel und Frobenius am zuletzt genannten Ort.

*** Vergl. ausser der unter * citirten Literatur: Weierstrass, BM 1868, S. 331, Anm. (Ges. Werke Bd. II, S. 36). *Die obigen Entwickelungen geben wir nach* Frobenius, SB 1894, S. 33 flg.

jedem Systeme $e_1 \leqq e_2$ ist, so sind damit alle drei Sätze mit einem Schlage bewiesen.

Greifen wir, um jetzt zum Beweise überzugehen, eine Determinante ϱ^{ten} Grades ($\varrho > 2$) unseres Systems der a_{ik}

$$M = |a_{\mu\nu}| \quad (\mu = \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\varrho, \; \nu = \nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\varrho)$$

heraus, die nicht (identisch) Null ist. Der Primtheiler p soll im grössten gemeinschaftlichen Theiler aller Subdeterminanten σ^{ten} Grades von M zur Potenz l'_σ enthalten sein, in M selbst also zur Potenz l'_ϱ. In M giebt es mindestens eine Subdeterminante $(\varrho - 2)^{\text{ten}}$ Grades, welche genau durch die $l'_{\varrho-2}{}^{\text{te}}$ Potenz von p theilbar ist; eine solche werde mit T bezeichnet. Alsdann ist nach einem bekannten Satze über Systeme von Subdeterminanten

$$MT = PS - QR, \tag{9}$$

wo P, Q, R, S Subdeterminanten $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$ Grades von M sind. Die linke Seite vorstehender Gleichung ist genau durch die

$$(l'_\varrho + l'_{\varrho-2})^{\text{te}} \text{ Potenz}$$

von p theilbar, die rechte mindestens durch die $2l'_{\varrho-1}{}^{\text{te}}$; daher ist

$$l'_\varrho + l'_{\varrho-2} \geqq 2\, l'_{\varrho-1},$$

oder

$$l'_{\varrho-1} - l'_{\varrho-2} \leqq l'_\varrho - l'_{\varrho-1}.$$

Da ferner die Ungleichung (8) nach Voraussetzung für jedes System, also auch für das von M, gilt, so ist

$$l'_1 - l'_0 \leqq l'_2 - l'_1 \leqq \cdots \leqq l'_{\varrho-1} - l'_{\varrho-2} \leqq l'_\varrho - l'_{\varrho-1}, \tag{10}$$

wo $l'_0 = 0$ zu setzen ist. Da, wie schon bekannt,

$$l'_1 - l'_0 \leqq l'_2 - l'_1$$

ist, so gilt der auf (10) sich stützende Beweis unserer Sätze auch für $\varrho = 2$.

Nunmehr wollen wir irgend eine Subdeterminante unseres Systems der a_{ik}

$$L = |a_{\varkappa\lambda}| \quad (\varkappa = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{\varrho-1}; \; \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{\varrho-1})$$

vom Grade $\varrho - 1$ mit der Determinante M in Beziehung setzen. Aus L geht dadurch eine Determinante ϱ^{ten} Grades

$$L_{\mu\nu} = |a_{\varrho\sigma}| \quad (\varrho = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{\varrho-1}, \mu; \; \sigma = \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{\varrho-1}, \nu)$$

hervor, dass man die Zeile und Spalte, in welcher das Element $a_{\mu\nu}$ von M steht, zu L hinzunimmt. Gehört das Element $a_{\mu\nu}$ einer Reihe von L an, so ist $L_{\mu\nu} = 0$ zu setzen.

Dann gilt nach Kronecker* die Identität

$$|La_{\mu\nu} - L_{\mu\nu}| = 0 \quad (\mu = \mu_1, \ldots \mu_\varrho;\ \nu = \nu_1, \ldots \nu_\varrho).$$

Entwickelt man die linke Seite derselben nach Potenzen von L, so kommt:

(11) $$L^\varrho M = L^{\varrho-1} M_1 + L^{\varrho-2} M_2 + \cdots + M_\varrho,$$

wobei M_σ $(\sigma = 1, 2, \ldots \varrho)$ homogene Funktionen σ^{ten} Grades der Grössen $L_{\mu\nu}$ bedeuten, deren Koefficienten Subdeterminanten $(\varrho - \sigma)^{\text{ten}}$ Grades von M sind.

---

* Kronecker, Crelle's Journal (70) Bd. 72, S. 153; Frobenius, SB 1894, S. 34. Letzterer zeigt daselbst, dass der Kr.'sche Satz eine Folgerung des nachstehenden Satzes von Sylvester (Phil. Mag. 1851, S. 279; Frobenius, Crelle's Journal (79) Bd. 86, S. 54; SB 1894, S. 242) ist: *Greift man aus einem Systeme von Elementen a_{ik} eine Determinante*

$$P = |a_{\varkappa\lambda}| \quad (\varkappa = \varkappa_1, \ldots \varkappa_\varrho,\ \lambda = \lambda_1, \ldots \lambda_\varrho)$$

vom ϱ^{ten} Grade und eine Determinante

$$S = |a_{\mu\nu}| \quad (\mu = \mu_1, \ldots \mu_\varsigma,\ \nu = \nu_1, \ldots \nu_\varsigma)$$

vom ς^{ten} Grade heraus und bildet die ς^2 Determinanten

$$P_{\mu\nu} = |a_{\sigma\tau}| \quad \begin{pmatrix} \sigma = \varkappa_1, \ldots \varkappa_\varrho, \mu, & \tau = \lambda_1, \ldots \lambda_\varrho, \nu \\ \mu = \mu_1, \ldots\ldots \mu_\varsigma, & \nu = \nu_1, \ldots\ldots \nu_\varsigma \end{pmatrix}.$$

$(\varrho + 1)^{\text{ten}}$ Grades, so ist identisch

$$\underset{\begin{pmatrix} \mu = \mu_1, \ldots \mu_\varsigma \\ \nu = \nu_1, \ldots \nu_\varsigma \end{pmatrix}}{|P_{\mu\nu}|} = P^{\varsigma-1} \begin{vmatrix} a_{\varkappa_1, \lambda_1} & \ldots & a_{\varkappa_1, \lambda_\varrho} & a_{\varkappa_1, \nu_1} & \ldots & a_{\varkappa_1, \nu_\varsigma} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\varkappa_\varrho, \lambda_1} & \ldots & a_{\varkappa_\varrho, \lambda_\varrho} & a_{\varkappa_\varrho, \nu_1} & \ldots & a_{\varkappa_\varrho, \nu_\varsigma} \\ a_{\mu_1, \lambda_1} & \ldots & a_{\mu_1, \lambda_\varrho} & a_{\mu_1, \nu_1} & \ldots & a_{\mu_1, \nu_\varsigma} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\mu_\varsigma, \lambda_1} & \ldots & a_{\mu_\varsigma, \lambda_\varsigma} & a_{\mu_\varsigma, \nu_1} & \ldots & a_{\mu_\varsigma, \nu_\varsigma} \end{vmatrix}.$$

Für den zweiten Faktor rechts wollen wir kurz

$$\begin{vmatrix} a_{\varkappa\lambda} & a_{\varkappa\nu} \\ a_{\mu\lambda} & a_{\mu\nu} \end{vmatrix}$$

schreiben; ferner *sei speciell* $\varsigma = \varrho + 1$. Dann wird, wenn wir weiter voraussetzen, dass P und S keine Reihe des gegebenen Systems gemeinsam haben, für

$$a_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu = \mu_1, \ldots \mu_\varsigma,\ \nu = \nu_1, \ldots \nu_\varsigma),$$

$P_{\mu\nu}$ zu $P_{\mu\nu} - Pa_{\mu\nu}$, und somit unsere vorstehende Identität zu

$$|P_{\mu\nu} - Pa_{\mu\nu}| = P^\varrho \begin{vmatrix} a_{\varkappa\lambda} & a_{\varkappa\nu} \\ a_{\mu\lambda} & 0 \end{vmatrix}.$$

Der zweite Faktor rechts ist aber Null, weil in dieser Determinante $(2\varrho + 1)^{\text{ten}}$ Grades alle Elemente Null sind, welche die letzten $\varrho + 1$ Zeilen mit den letzten $\varrho + 1$ Spalten gemeinsam haben. Also ist

$$|P_{\mu\nu} - Pa_{\mu\nu}| = 0,$$

und das ist *die Kronecker'sche Identität.* Haben P und S Reihen gemein, so ist durch wiederholtes Hinschreiben von Reihen ein System zu schaffen, wo dies nicht mehr der Fall ist. Dadurch ergiebt sich sofort die oben angegebene diesbezügliche Vorschrift.

Der Primtheiler p sei in L zur Potenz l und im grössten gemeinschaftlichen Theiler aller Determinanten $L_{\mu\nu}$ zur Potenz l' enthalten. Also enthält $L^{\varrho-\sigma}M_\sigma$ den Faktor p mindestens zur Potenz

$$(\varrho - \sigma)\, l + l'_\sigma + l'_{\varrho-\sigma} = \tau_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, \ldots \varrho);$$

$L^\varrho M$ enthält p genau zur Potenz

$$\varrho l + l'_\varrho = \tau_0.$$

Nun ist

$$\tau_{\sigma+1} - \tau_\sigma = (l' - l) - (l'_{\varrho-\sigma} - l'_{\varrho-\sigma-1}),$$

wegen (10) aber

$$l'_{\varrho-\sigma} - l'_{\varrho-\sigma-1} \leqq l'_\varrho - l'_{\varrho-1} \quad (\sigma = 0, 1, \ldots \varrho - 1),$$

mithin

(12) $$\tau_{\sigma+1} - \tau_\sigma \geqq (l' - l) - (l'_\varrho - l'_{\varrho-1}) \quad (\sigma = 0, 1, \ldots \varrho - 1).$$

Wir behaupten nun, dass

(13) $$l' - l \leqq l'_\varrho - l'_{\varrho-1}$$

ist. Denn wäre

$$l' - l > l'_\varrho - l'_{\varrho-1},$$

so wäre nach (12)

$$\tau_{\sigma+1} - \tau_\sigma > 0,$$

also

$$\tau_{\sigma+1} > \tau_\sigma \quad (\sigma = 0, 1, \ldots \varrho - 1)$$

oder

$$\tau_\varrho > \tau_{\varrho-1} > \ldots > \tau_1 > \tau_0.$$

Nun enthält aber die linke Seite von (11) den Primtheiler p genau zur Potenz τ_0, also kann ihn nicht jedes Glied der rechten Seite zu einer höheren Potenz enthalten. Also gilt die Beziehung (13), die man auch schreiben kann

(14) $$l'_\varrho + l \geqq l'_{\varrho-1} + l';$$

bedeutet nun λ' den grössten gemeinschaftlichen Theiler aller Superdeterminanten* von L, so ist sicher

$$l' \geqq \lambda',$$

und somit wegen (14)

$$l'_\varrho + l \geqq l'_{\varrho-1} + \lambda'.$$

Damit haben wir den wichtigen Satz gewonnen:

*3) Das Produkt zweier Determinanten ϱ^{ten} und $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades S_ϱ bez. $S_{\varrho-1}$ eines Systems ist theilbar durch das Produkt aus dem grössten gemeinschaftlichen Theiler aller Subdeterminanten $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades von S_ϱ und dem grössten gemeinschaftlichen Theiler aller Superdeterminanten ϱ^{ten} Grades von $S_{\varrho-1}$.***

* Ist B eine Subdeterminante von A, so heisst A eine Superdeterminante von B.

** Der Satz lässt sich noch verallgemeinern. Vergl. Frobenius, l. c. S. 35.

Mit Hilfe dieses Satzes kommen wir rasch ans Ziel. Wir wählen jetzt für L und M *reguläre* Determinanten $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$ bez. ϱ^{ten} Grades unseres Systems. Dann ist

$$l = l_{\varrho-1}, \quad l'_\varrho = l_\varrho,$$

und (14) geht in

$$l' + l'_{\varrho-1} \leqq l_\varrho + l_{\varrho-1}$$

über; ferner ist

$$l' \geqq l_\varrho, \quad l'_{\varrho-1} \geqq l_{\varrho-1}.$$

Aus den beiden ersten der drei letzten Ungleichungen folgt

$$l'_{\varrho-1} \leqq l_{\varrho-1},$$

und somit ist wegen der dritten

$$l'_{\varrho-1} = l_{\varrho-1}.$$

Analog findet man

$$l' = l_\varrho.$$

Damit sind aber die Sätze 1) und 2) für den betrachteten Werth von ϱ und für jeden kleineren bewiesen. Nach Satz 1) ist ferner, da M regulär ist,

$$l'_{\varrho-2} = l_{\varrho-2},$$

und deshalb wegen (10)

$$l_{\varrho-1} - l_{\varrho-2} \leqq l_\varrho - l_{\varrho-1}$$

oder

$$e_{\varrho-1} \leqq e_\varrho.$$

Damit sind unsere Sätze 1), 2) und I allgemein bewiesen.

6. Die Bedeutung der Sätze 1) und 2) für die Theorie der ET wird im Folgenden erst zu Tage treten; in Satz I dagegen haben wir einen *ersten Fundamentalsatz über Elementartheiler* gewonnen. Wir werden aus ihnen zunächst einige Folgerungen ziehen:

a) Ist von den Zahlen $l_1, l_2 \ldots l_r$ die Zahl $l_\varrho > 0$, aber $l_{\varrho-1} = 0$, so ist nach (4) auch

$$l_{\varrho-2} = l_{\varrho-3} = \cdots = l_1 = 0;$$

da nach Voraussetzung

$$e_\varrho = l_\varrho - l_{\varrho-1} > 0$$

ist, so sind nach Satz I auch

$$e_{\varrho+1}, \quad e_{\varrho+2}, \cdots e_r$$

von Null verschiedene, positive ganze Zahlen. Die Differenzen

$$l_{\varrho+1} - l_\varrho, \quad l_{\varrho+2} - l_{\varrho+1}, \ldots l_r - l_{r-1}$$

sind daher grösser als Null; *mithin ist unter der gemachten Voraussetzung*

(15) $$0 = l_1 = l_2 = \cdots = l_{\varrho-1} < l_\varrho < l_{\varrho+1} < \cdots < l_r,$$

wie wir dies für einen Specialfall schon in 2 nachgewiesen haben [vergl. (2)]. Ferner hat man

(16) $$e_r \geqq e_{r-1} \geqq \cdots \geqq e_\varrho > 0,$$
$$e_{\varrho-1} = e_{\varrho-2} = \cdots = e_1 = 0.$$

Zur Basis p gehören also hier die ET

$$p^{e_r},\ p^{e_{r-1}}, \ldots p^{e_\varrho}$$

des Systems. Enthält der r^{te} ET unseres Systems den Primtheiler p linear, so ist p ein linearer ET des Systems (4), und sämmtliche zur Basis p gehörende ET sind nach (16) ebenfalls linear. Dies tritt ein, wenn p, das in D_r zur Potenz l_r auftritt, in D_{r-1} zur Potenz $l_r - 1$ vorkommt. Also gilt der Satz:

4) Damit die zur Basis p gehörenden ET eines Systems vom Range r nur Exponenten 1 *haben, ist nothwendig und hinreichend, dass der in allen Determinanten r^{ten} Grades zur Potenz l_r auftretende Primtheiler p in allen Determinanten* $(r-1)^{\text{ten}}$ *Grades zur Potenz* $l_r - 1$ *auftritt.*

Ein anderes Kriterium für das Vorhandensein lauter linearer ET von gegebener Basis lernten wir für einen Specialfall in 3 kennen; dasselbe gilt auch hier und lässt sich leicht für ein System vom Range r verallgemeinern.

b) Jeder Primtheiler p, der in D_ϱ zur Potenz $l_\varrho (> 0)$ enthalten ist, tritt wegen (15) auch in E_ϱ auf und zwar zu einer Potenz, die kleiner oder gleich l_ϱ und nicht Null ist. *Jeder Theiler von D_ϱ ist sonach ein Theiler von E_ϱ, und umgekehrt.*

c) Wie wir wissen, ist D_r das Produkt sämmtlicher ET unseres Systems; da nun für einen Primtheiler p

$$l_{r-1} = e_{r-1} + e_{r-2} + \cdots + e_1$$

ist, so findet man mit Rücksicht auf (16) D_{r-1} aus den ETn

$$p^{e_r},\ p^{e_{r-1}}, \ldots q^{e'_r},\ q^{e'_{r-1}}, \ldots$$

des Systems, indem man die ET höchsten Grades $p^{e_r}, q^{e'_r} \ldots$, die zur Basis $p, q \ldots$ gehören, weglässt und das Produkt der übrigen ET bildet; analog findet man D_{r-2} u. s. w. *Sind also der Rang und die ET eines Systems bekannt, so kann man auf diese Weise die grössten gemeinschaftlichen Theiler D_ϱ berechnen. Man kann aber auch auf Grund von* (16) *den ersten, zweiten, … r^{ten} Elementartheiler sofort hinschreiben:*

Die höchsten Potenzen von $p, q, \ldots$ sind die Faktoren von E_r, die zweithöchsten diejenigen von E_{r-1}, u. s. w. So besitzt in unserem Beispiele S. 3 die Determinante D den ET $(a_1 \lambda_1 + b_1 \lambda_2)$ dreimal, ausserdem den ET $(a_2 \lambda_1 + b_2 \lambda_2)$; daher ist

$$E_4 = (a_1 \lambda_1 + b_1 \lambda_2)(a_2 \lambda_1 + b_2 \lambda_2), \quad E_3 = E_2 = (a_1 \lambda_1 + b_1 \lambda_2), \quad E_1 = 1.$$

Nennen wir p^{e_ϱ} einen einfachen Elementartheiler*, E_σ ($\sigma = 1, 2, \ldots n$) einen zusammengesetzten Elementartheiler des Systems der a_{ik}, so ist durch die Betrachtungen in 4 die Berechnung der einfachen ET aus den zusammengesetzten, durch vorstehende hingegen die der zusammengesetzten ET aus den einfachen gegeben. Wird von einem „ET" schlechthin gesprochen, so ist stets ein „einfacher" gemeint.

Stimmen für zwei Systeme der Rang und die einfachen ET überein, so stimmen auch die zusammengesetzten ET beider Systeme überein, ebenso die grössten gemeinschaftlichen Theiler ihrer Subdeterminanten gleich hohen Grades. Auch das Umgekehrte ist richtig.

d) Nun eine Folgerung aus 1)! Ist R eine reguläre Determinante ϱ^{ten} Grades des Systems, so enthält sie nach Satz 1) eine reguläre Determinante $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$ Grades als Subdeterminante, letztere hat wieder nach 1) eine reguläre Determinante $(\varrho - 2)^{\text{ten}}$ Grades als Subdeterminante, u. s. w.; p tritt also im grössten gemeinschaftlichen Theiler aller Subdeterminanten σ^{ten} Grades *von* R genau zur Potenz l_σ auf ($\sigma = 1, 2, \ldots \varrho$); *die zur Basis p gehörigen ET einer in Bezug auf die Basis p regulären Determinante des Systems der a_{ik} sind zugleich ET des gegebenen Systems.*

e) Zum Schlusse eine zweite Folgerung aus 1). Jede Determinante S_ϱ vom ϱ^{ten} Grade aus den a_{ik} ist durch den grössten gemeinschaftlichen Theiler $T_{\varrho-1}$ aller Subdeterminanten $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$ Grades von S_ϱ theilbar (4). Ist S_ϱ regulär, so enthält es den Faktor p genau zur Potenz l_ϱ, $T_{\varrho-1}$ enthält ihn wegen Satz 1) genau zur Potenz $l_{\varrho-1}$, und somit tritt p im Quotienten

$$\frac{S_\varrho}{T_{\varrho-1}}$$

zur Potenz

$$l_\varrho - l_{\varrho-1} = e_\varrho$$

auf. Dies besagt, da in E_ϱ der Faktor p zur Potenz e_ϱ auftritt (4):

5) Der ϱ^{te} Elementartheiler eines Systems von Elementen a_{ik} ist der grösste gemeinschaftliche Theiler der Quotienten, welche man erhält, indem man jede Determinante ϱ^{ten} Grades des Systems durch den grössten gemeinschaftlichen Theiler ihrer Subdeterminanten $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$ Grades dividirt.

Dieser Satz lässt den ϱ^{ten} *Elementartheiler eines Systems selbst als einen grössten gemeinschaftlichen Theiler* erscheinen, während er früher als Quotient zweier solcher Theiler definirt wurde. Smith definirte zuerst den ϱ^{ten} ET auf vorstehende Weise als grössten gemeinschaftlichen Theiler.**

---

* Nach Frobenius. Letzterer braucht die Bezeichnung „zusammengesetzter ET" in anderem Sinne. Vergl. Crelle's Journ. (79) Bd. 86, S. 162.

** Smith, Phil. Trans. 1861 (62), vol. 151, S. 318. Die Benennung „ϱ^{ter} ET" führte Frobenius (Crelle's Journ. (79) Bd. 86, S. 148) ein.

7. Vertauscht man im Systeme der a_{ik} parallele Reihen, so bleibt die Gesammtheit der Determinanten σ^{ten} Grades ($\sigma = 1, 2, \ldots n$), welche man aus ihm entnehmen kann, abgesehen vom Vorzeichen, ungeändert; daher bleiben der Rang r, die Zahlen l_ϱ, e_ϱ und die Ausdrücke D_ϱ, E_ϱ dieselben.

Dies vorausgeschickt nehmen wir nun einmal an, dass in unserem Systeme

$$a_{ik} = a_{ki},$$

dass also das System ein *symmetrisches* sei. Ueber ein solches System wollen wir nun mit Hilfe von Satz 2) in 5 einen für spätere Entwickelungen höchst wichtigen Satz ableiten.* Zunächst führen wir für solche Systeme einen neuen Begriff ein:

Eine Subdeterminante eines symmetrischen Systems, deren Diagonalelemente der Diagonale des Systems angehören, wird eine Hauptunterdeterminante genannt; dieselbe ist ebenfalls symmetrisch.

Angenommen nun unter den Hauptelementen sei kein reguläres; dann sei a_{ik} ein reguläres Element. Die Hauptunterdeterminante zweiten Grades

$$a_{ii}\, a_{kk} - a_{ik}^2$$

enthält dann p genau zur Potenz $2l_1$; also ist

$$l_2 \leqq 2l_1;$$

wir wissen aber, dass die Ungleichung

$$l_2 \geqq 2l_1$$

besteht (5). Daher muss

$$l_2 = 2l_1$$

sein, und die Determinante $a_{ii}\, a_{kk} - a_{ik}^2$ ist sonach regulär.

Um jetzt zu allgemeineren Betrachtungen überzugehen, nehmen wir an, dass die Hauptunterdeterminante

$$A_{\varrho-1} = \sum \pm\, a_{11}\, a_{22} \ldots a_{\varrho-1,\,\varrho-1}$$

vom $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade regulär sei, dagegen keine der Hauptunterdeterminanten ϱ^{ten} Grades

$$A_{ii} = \sum \pm\, a_{11}\, a_{22} \ldots a_{\varrho-1,\,\varrho-1}\, a_{ii},$$

wo $i > \varrho - 1$ ist. Dann giebt es nach 2) eine reguläre Subdeterminante ϱ^{ten} Grades

$$A_{ik} = \sum \pm\, a_{11}\, a_{22} \ldots a_{\varrho-1,\,\varrho-1}\, a_{ik},$$

welche $A_{\varrho-1}$ enthält. Setzen wir dann für $\varrho + 1 \leqq r$

$$A_{\varrho+1} = \sum \pm\, a_{11}\, a_{22} \ldots a_{\varrho-1,\,\varrho-1}\, a_{ii}\, a_{kk},$$

so ist nach der Determinantentheorie, da in $A_{\varrho+1}$

* Vergl. zum Folgenden: Frobenius, SB 1894, S. 36 flg.

$$\text{adj.}\, a_{ii} = A_{kk} = \sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{\varrho-1,\, \varrho-1} a_{kk},$$
$$\text{adj.}\, a_{kk} = A_{ii},$$
$$\text{adj.}\, a_{ik} = -A_{ik}$$

ist,

$$A_{\varrho-1} A_{\varrho+1} = A_{ii} A_{kk} - A_{ik}^2. \tag{17}$$

Nun hat A_{ik} den Faktor p genau zur Potenz l_ϱ, A_{ii} und A_{kk} haben ihn zu höherer Potenz; steckt daher p in $A_{\varrho+1}$ zur Potenz $l'_{\varrho+1}$, so ist, weil $A_{\varrho-1}$ regulär ist, wegen (17)

$$l_{\varrho-1} + l'_{\varrho+1} = 2 l_\varrho, \tag{18}$$

nach I aber

$$l_{\varrho+1} - 2 l_\varrho + l_{\varrho-1} \geqq 0$$

und somit

$$l_{\varrho+1} \geqq l'_{\varrho+1}.$$

Da aber andererseits p in $D_{\varrho+1}$ zur Potenz $l_{\varrho+1}$ und in der einzelnen Subdeterminante $A_{\varrho+1}$ zur Potenz $l'_{\varrho+1}$ auftritt, so ist sicher

$$l_{\varrho+1} \leqq l'_{\varrho+1};$$

aus den beiden letzten Ungleichungen folgt aber

$$l_{\varrho+1} = l'_{\varrho+1}, \tag{19}$$

d. h. $A_{\varrho+1}$ ist regulär. Ferner ergiebt sich aus (18) und (19)

$$e_{\varrho+1} = e_\varrho.$$

Bezeichnen wir jetzt allgemein die Determinante

$$\sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{\sigma\sigma}$$

unseres Systems mit $A_{\sigma\sigma}$ ($A_{11} = a_{11}$), so können wir auf Grund der eben angestellten Betrachtungen unser gegebenes System durch passende Anordnung der Zeilen und *entsprechende* der Spalten, *ohne also die Symmetrie aufzuheben*, in ein anderes so umformen, dass die Reihe der Hauptunterdeterminanten

$$A_1, A_2, \ldots A_r$$

folgende Eigenschaften hat:

6) Ist A_ϱ nicht regulär, so sind nicht nur $A_{\varrho-1}$ und $A_{\varrho+1}$ regulär, sondern auch

$$B_\varrho = \sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{\varrho-1,\, \varrho-1} a_{\varrho,\, \varrho+1},$$

aber nicht

$$C_\varrho = \sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{\varrho-1,\, \varrho-1} a_{\varrho+1,\, \varrho+1};$$

ferner ist stets A_r regulär.

Falls A_{r-1} nicht regulär ist, so ist das zuletzt Behauptete nach dem Vorhergehenden, als richtig Erwiesenen, giltig. Ist aber A_{r-1} regulär, und wird oben $\varrho = r$, also

$$A_{ik} = \sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{r-1,\, r-1} a_{ik}$$

u. s. w. gesetzt, so ist nach (17), da hier $A_{r+1} = 0$ zu nehmen ist,

$$A_{ii} A_{kk} = A_{ik}^2;$$

wären nun die Hauptunterdeterminanten, welche A_{r-1} enthalten, alle nicht regulär, so gäbe es wegen Satz 2) eine reguläre Determinante A_{ik}, die rechte Seite vorstehender Gleichung enthielte p genau zur Potenz $2l_r$, die linke zu einer höheren Potenz. Es muss daher eine reguläre Hauptunterdeterminante r^{ten} Grades geben, welche A_{r-1} enthält, u. s. w.

Zugleich hat sich folgender Satz über ET ergeben:

Giebt es in Bezug auf einen Primtheiler p eine reguläre Hauptunterdeterminante $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$ Grades, dagegen keine reguläre Hauptunterdeterminante ϱ^{ten} Grades, welche die erstere enthält, so ist für $\varrho + 1 \leqq r$

$$e_{\varrho+1} = e_\varrho.$$

8. Ziehen wir neben unserem Systeme von n^2 Elementen a_{ik} ein *zweites* von n^2 Elementen b_{ik}, die mit den a_{ik} gleichartig sind, in Betracht, so erhalten wir aus beiden durch Composition ein drittes System von n^2 Elementen

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + a_{i3} b_{3k} + \cdots + a_{in} b_{nk} \quad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

derselben Art. Es entsteht nun die für unsere Theorie fundamentale Aufgabe, *die zusammengesetzten ET dieser drei Systeme mit einander in Beziehung zu setzen.* Diese wird durch folgendes Theorem gelöst:

II. Der σ^{te} Elementartheiler eines Systems, das aus zwei (oder mehreren) Systemen gleicher Art componirt ist, ist ein ganzes Vielfaches des σ^{ten} Elementartheilers jedes dieser Systeme.*

Um dasselbe zu beweisen, bezeichnen wir allgemein den grössten gemeinschaftlichen Theiler aller Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades des Systems der b_{ik} mit B_ϱ, das der c_{ik} mit C_ϱ; der Primtheiler p sei in B_ϱ zur Potenz β^ϱ, in C_ϱ zur Potenz γ_ϱ enthalten. Es sei ferner

$$L = |b_{\varkappa\lambda}| \quad (\varkappa = \varkappa_1, \ldots \varkappa_{\varrho-1};\ \lambda = \lambda_1, \ldots \lambda_{\varrho-1})$$

eine reguläre Determinante $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$ Grades aus den b_{ik} und

---

* Smith, Phil. Trans. 1861 (62), vol. 151, S. 320; Proc. of the L. math. soc. 1873, vol. IV, S. 244. Frobenius, Crelle's Journ. (80) Bd. 88, S. 114 u. SB 1894, S. 40 u. S. 42. Hensel, Crelle's Journ. (95) Bd. 114, S. 110. Obiges nach Frobenius a. letztgenannten O.

$$M = |c_{\mu\nu}| \quad (\mu = \mu_1, \dots \mu_\varrho, \ \nu = \nu_1, \dots \nu_\varrho)$$

eine reguläre Determinante ϱ^{ten} Grades aus den c_{ik}.* Wegen Satz 1) enthält dann der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$ Grades von M den Faktor p genau zur Potenz $\gamma_{\varrho-1}$.

Nun betrachte man das System

$$\begin{matrix}
b_{\varkappa_1,\lambda_1} \dots\dots b_{\varkappa_1,\lambda_{\varrho-1}} & b_{\varkappa_1,\nu_1} \dots\dots b_{\varkappa_1,\nu_\varrho} \\
\vdots \qquad\quad \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\
b_{\varkappa_{\varrho-1},\lambda_1} \dots b_{\varkappa_{\varrho-1},\lambda_{\varrho-1}} & b_{\varkappa_{\varrho-1},\nu_1} \dots b_{\varkappa_{\varrho-1},\nu_\varrho} \\
c_{\mu_1,\lambda_1} \dots\dots c_{\mu_1,\lambda_{\varrho-1}} & c_{\mu_1,\nu_1} \dots\dots c_{\mu_1,\nu_\varrho} \\
\vdots \qquad\quad \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\
c_{\mu_\varrho,\lambda_1} \dots\dots c_{\mu_\varrho,\lambda_{\varrho-1}} & c_{\mu_\varrho,\nu_1} \dots c_{\mu_\varrho,\nu_\varrho}
\end{matrix}$$

und denke sich dieses System im Artikel 5 zum Systeme der a_{ik} gewählt, nehme für die Determinanten L und M daselbst die oben angegebenen Determinanten L und M und wende die Formel (13) an. Man erhält, da jetzt

$$l = \beta_{\varrho-1}, \quad l'_\varrho = \gamma_\varrho, \quad l'_{\varrho-1} = \gamma_{\varrho-1}$$

zu setzen ist,

$$l' - \beta_{\varrho-1} \leqq \gamma_\varrho - \gamma_{\varrho-1}.$$

Eine Determinante $L_{\mu\nu}$ hat die Gestalt

$$\begin{vmatrix}
b_{\varkappa_1,\lambda_1} \dots\dots b_{\varkappa_1,\lambda_{\varrho-1}} & b_{\varkappa_1,\nu} \\
\vdots \qquad\quad \vdots & \vdots \\
b_{\varkappa_{\varrho-1},\lambda_1} \dots b_{\varkappa_{\varrho-1},\lambda_{\varrho-1}} & b_{\varkappa_{\varrho-1},\nu} \\
c_{\mu,\lambda_1} \dots\dots c_{\mu,\lambda_{\varrho-1}} & c_{\mu,\nu}
\end{vmatrix} \quad (\mu = \mu_1, \dots \mu_\varrho, \ \nu = \nu_1, \dots \nu_\varrho),$$

ist also eine homogene lineare ganze Funktion von n Determinanten ϱ^{ten} Grades des Systems

$$\begin{matrix}
b_{1,\lambda_1} \dots b_{1,\lambda_{\varrho-1}} & b_{1,\nu} \\
\vdots \qquad \vdots & \vdots \\
b_{n,\lambda_1} \dots b_{n,\lambda_{\varrho-1}} & b_{n,\nu},
\end{matrix}$$

wie sich wegen (20) durch Zerlegung von $L_{\mu\nu}$ sofort ergiebt. Also enthält $L_{\mu\nu}$ den Faktor p mindestens zur Potenz β_ϱ, es ist

$$l' \geqq \beta_\varrho$$

und somit

$$\beta_\varrho - \beta_{\varrho-1} \leqq \gamma_\varrho - \gamma_{\varrho-1},$$

w. z. b. w.

---

* Ist $r_c(r_b)$ der Rang des Systems der $c_{ik}(b_{ik})$, so ist $r_c \leqq r_b$, da jede Determinante σ^{ten} Grades aus den c_{ik} eine lineare Form der Determinanten σ^{ten} Grades aus den b_{ik} ist (Baltzer, Determinanten, Leipzig 1881, fünfte Aufl., § 6; vergl. auch 10). Ist daher $\varrho \leqq r_c$, so ist auch $\varrho \leqq r_b$.

9. *Lässt sich der eben gewonnene Fundamentalsatz umkehren?* Ehe wir auf diese wichtige Frage eingehen, müssen wir uns näher mit der Composition von Systemen befassen. Dies wird im nächsten Paragraphen geschehen; hier soll zuvor noch eine für spätere Anwendung wichtige Eigenschaft der Subdeterminanten unseres Systems der a_{ik} (4—7) dargelegt werden; die früheren Bezeichnungen behalten wir bei. Seien nun

$$\left.\begin{array}{ll} P = |a_{\varkappa\lambda}|, & Q = |a_{\varkappa\nu}| \\ R = |a_{\mu\lambda}|, & S = |a_{\mu\nu}| \end{array}\right| \begin{pmatrix} \varkappa = \varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_\varrho \\ \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\varrho \\ \mu = \mu_1, \mu_2, \dots \mu_\varrho \\ \nu = \nu_1, \nu_2, \dots \nu_\varrho \end{pmatrix}$$

vier Determinanten ϱ^{ten} Grades aus den a_{ik}; die Indices $\nu_1 \dots \nu_\varrho$ können zum Theile mit den Indices $\lambda_1 \dots \lambda_\varrho$ übereinstimmen, ebenso die Indices $\mu_1 \dots \mu_\varrho$ mit den Indices $\varkappa_1 \dots \varkappa_\varrho$. Ist dieses der Fall, so verschaffen wir uns durch wiederholtes Hinschreiben von Reihen ein neues System, in welchem dasselbe nicht mehr der Fall ist. Für das neue System sind die Grössen D_ϱ, l_ϱ u. s. w. dieselben, wie vorher, da alle neu hinzukommenden Determinanten ϱ^{ten} Grades (identisch) Null sind. Nun ist nach dem Satze von Sylvester in 5, S. 9, Anmerkung:

(20) $$|P_{\mu\nu}| = P^{\varrho-1} \begin{vmatrix} a_{\varkappa\lambda} & a_{\varkappa\nu} \\ a_{\mu\lambda} & a_{\mu\nu} \end{vmatrix} \quad (\mu = \mu_1, \dots \mu_\varrho, \quad \nu = \nu_1, \dots \nu_\varrho),$$

wo

$$P_{\mu\nu} = |a_{\sigma\tau}| \quad (\sigma = \varkappa_1, \dots \varkappa_\varrho, \mu;\ \tau = \lambda_1, \dots \lambda_\varrho, \nu)$$

ist, und das System der Determinante rechts aus denen von P, Q, R, S in bekannter Weise gebildet ist. Setzt man nun in den Determinanten von (20) für $a_{\mu\nu}$ Null, so erhält man wie S. 9, Anmerkung,

$$|P_{\mu\nu} - P a_{\mu\nu}| = P^{\varrho-1} \begin{vmatrix} a_{\varkappa\lambda} & a_{\varkappa\nu} \\ a_{\mu\lambda} & 0 \end{vmatrix}$$

oder

(21) $$|P a_{\mu\nu} - P_{\mu\nu}| = P^{\varrho-1} QR.$$

Jetzt entwickele man die linke Seite von (21) nach Potenzen von P; es wird bei geeigneter Umstellung

(22) $$\begin{aligned} P^\varrho S - P^{\varrho-1} QR &= (PS - QR) P^{\varrho-1} \\ &= S_1 P^{\varrho-1} + S_2 P^{\varrho-2} + \dots + S_\varrho, \end{aligned}$$

wo S_ς $(\varsigma = 1, 2, \dots \varrho)$ eine Summe von Produkten aus Determinanten $(\varrho - \varsigma)^{\text{ten}}$ Grades aus dem Systeme von S und Determinanten ς^{ten} Grades aus den $P_{\mu\nu}$ vorstellt. Jede von den letzteren Determinanten ist aber wiederum nach obigem Satze von Sylvester gleich einer Determinante $(\varrho + \varsigma)^{\text{ten}}$ Grades des gegebenen Systems der a_{ik} multiplizirt mit $P^{\varsigma-1}$. Also enthält

$$S_\varsigma P^{\varrho-\varsigma}$$

den Faktor p mindestens zur Potenz

$$l_{\varrho-\varsigma}+l_{\varrho+\varsigma}+(\varrho-1)l=\tau_\varsigma \quad (\varsigma=1,2,\ldots\varrho),$$

wenn p in P zur Potenz l auftritt. Nun ist aber wegen I in 5

$$\tau_{\varsigma+1}-\tau_\varsigma=(l_{\varrho+\varsigma+1}-l_{\varrho+\varsigma})-(l_{\varrho-\varsigma}-l_{\varrho-\varsigma-1})\geqq 0,$$

also

$$\tau_{\varsigma+1}\geqq\tau_\varsigma.$$

Daher tritt p in (22) rechts mindestens zur Potenz

$$\tau_1=l_{\varrho-1}+l_{\varrho+1}+(\varrho-1)l$$

auf.

a) *Daher muss p in*

$$PS-QR$$

mindestens zur Potenz $l_{\varrho-1}+l_{\varrho+1}$ auftreten. Da stets nach I

$$l_{\varrho-1}+l_{\varrho+1}\geqq 2l_\varrho$$

ist, so hat dieses Resultat nur dann Bedeutung, wenn

$$l_{\varrho-1}+l_{\varrho+1}>2l_\varrho$$

ist.

b) *Ist $\varrho=r$, also gleich dem Range des Systems, so wird*

$$PS-QR=0,^*$$

weil die Determinanten $(r+\varsigma)^{\text{ten}}$ Grades jetzt alle Null sind. Diese Bemerkung kann man benutzen, um den Satz zu beweisen:

c) *Der Rang r einer schiefsymmetrischen Determinante $|a_{ik}|$ ist stets eine gerade Zahl.***

Denn wäre r ungerade, so betrachte man eine Determinante r^{ten} Grades

$$R=|a_{\mu\lambda}| \quad (\mu=\mu_1,\ldots\mu_r,\ \lambda=\lambda_1,\ldots\lambda_r)$$

aus den a_{ik}, die nicht Null ist. Dann wird

$$Q=|a_{\lambda\mu}| \quad (\lambda=\lambda_1,\ldots\lambda_r,\ \mu=\mu_1,\ldots\mu_r)$$

nicht Null sein, da

$$Q=R(-1)^r=-R$$

ist. Nach obigem Satze b) wäre dann das Produkt der Determinanten

$$P=|a_{\lambda\lambda'}| \qquad (\lambda,\lambda'=\lambda_1,\ldots\lambda_r)$$

und

$$S=|a_{\mu\mu'}| \qquad (\mu,\mu'=\mu_1,\ldots\mu_r)$$

gleich $-R^2$, also nicht Null, während doch P und S als schiefsymmetrische Determinanten ungeraden Grades beide Null sind; also ist r *gerade*, w. z. b. w.

Zum Schlusse dieses Paragraphen bemerken wir noch, *dass Alles in Artikel 4—9 Gesagte Wort für Wort giltig bleibt, wenn wir unter den a_{ik} ganze Grössen eines beliebigen Körpers von algebraischen Zahlen oder Funktionen,* unter p einen *wirklichen* oder *idealen Primtheiler* in dem betrachteten Körper verstehen.

* Frobenius, Crelle's Journ. (77) Bd. 82, S. 240.

** Frobenius, l. c. S. 242.

§ 2. Symbolisches Rechnen mit bilinearen Formen.*

10. Wir betrachten ein System

$$\begin{matrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{matrix}$$

von n^2 Elementen a_{ik} beliebiger, aber unter sich gleicher Art. Die a_{ik} brauchen also jetzt nicht mehr ganze Grössen zu sein, es können irgendwelche Zahlen eines algebraischen Zahlenkörpers — z. B. irgendwelche rationale Zahlen — oder beliebige Funktionen einer oder mehrerer Variabelen, u. s. w., sein. Dieses System von n^2 Elementen fassen wir mit Frobenius *im Bilde einer bilinearen Form*

$$A = \sum a_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

zusammen, deren Koefficientensystem eben jenes System der a_{ik} vorstellt, deren Determinante also mit der Determinante

$$| a_{ik} | \quad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

identisch ist. Die Form A heisst eine ordinäre oder eine singuläre, je nachdem ihre Determinante $|a_{ik}|$ nicht Null bez. nicht identisch Null oder Null bez. identisch Null ist.

a) Multiplikation.

Wir ziehen nunmehr neben der bilinearen Form A eine zweite bilineare Form

$$B = \sum b_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \dots n),$$

die, d. h. deren Koefficientensystem, mit A bez. dem Systeme der a_{ik} gleichartig ist, in Betracht. Aus beiden Formen leiten wir alsdann eine dritte bilineare Form

$$(1) \qquad P = \sum \frac{\partial A}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial B}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

gleicher Art ab. Von dieser Form P sagen wir, sie sei aus den Formen A und B zusammengesetzt, und bezeichnen dieselbe mit AB, wo A und B in dieser Reihenfolge zu nehmen sind. Wir nennen die Form P auf Grund der symbolischen Gleichung

$$(2) \qquad P = AB$$

geradezu das Produkt der Formen A und B, A und B die Faktoren des Produkts.

---

* Ueber die Entwickelung dieser Theorie vergl. Encyklopädie der mathem. Wissenschaften, Leipzig 1899, Bd. I, S. 169, Anmerk. 19. Obige Darstellung schliesst sich an Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen, Crelle's Journal (78) Bd. 84, S. 1 flg. an.

Wo also im Folgenden ein Produkt AB von Formen auftritt, ist dasselbe *symbolisch* aufzufassen, während die Addition und Subtraktion von Formen im gewöhnlichen Sinne zu nehmen ist.

Die Bildung des symbolischen Produktes zweier Formen setzt voraus, dass dieselben von gleichviel Variabelenpaaren abhängen; trifft diese Voraussetzung nicht von vornherein zu, so kann man dadurch, dass man zu einer der Formen Glieder mit Koefficienten Null hinzufügt, bewirken, dass beide Formen von gleichvielen Variabelenpaaren abhängen.

Nach (1) ist nun

(3) $$P = \sum a_{ik} x_i \frac{\partial B}{\partial x_k} = \sum b_{ik} \frac{\partial A}{\partial y_i} y_k = \sum a_{il} b_{lk} x_i y_k,$$

wo $i, k, l = 1, 2, \ldots n$ zu setzen ist. Für

(4) $$P = \sum p_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

wird somit

(5) $$p_{ik} = \sum a_{il} b_{lk} \quad (l = 1, 2, \ldots n).$$

Bezeichnen wir allgemein die Determinante einer Form

$$A = \sum a_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

mit $|A|$, so ist wegen (5)

$$|P| = |A| \cdot |B|$$

oder es ist

(6) $$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

Das System der Determinante $|AB|$ ist aus denjenigen von $|A|$ und $|B|$ *in ganz bestimmter Weise* componirt (zusammengesetzt), wenn $P = AB$ aus A und B zusammengesetzt ist.

Jede Subdeterminante ϱ^{ten} Grades von $|AB|$ ist ferner wegen (5) eine homogene lineare ganze Funktion der Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades von $|A|$ und eine ebensolche Funktion der Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades von $|B|$.

II. Für die symbolischen Produkte gilt

1. *das distributive Gesetz.* Denn ist

$$C = \sum c_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

eine weitere bilineare Form, so ist nach der Definition

$$A(B + C) = \sum \frac{\partial A}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial (B + C)}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial A}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial B}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial A}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial C}{\partial x_i}$$

und somit

(7) $$A(B + C) = AB + AC.$$

Ist
$$D = \sum d_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$
eine weitere bilineare Form, so folgt aus (7)

(8)
$$(A + B)(C + D) = (A + B)C + (A + B)D$$
$$= (AC + BC + AD + BD).$$

Sind a und b konstante Grössen, so ist per definit.
$$(aA)B = A(aB) = aAB,$$
wegen (7) also
$$(aA + bB)C = aAC + bBC;$$
ferner ist
$$|aA| = a^n |A|.$$

Es gilt ferner für diese Produkte

2. *das associative Gesetz.* Denn $(AB)C$ entsteht nach (1) dadurch, dass man in B zuerst
$$x_i = \frac{\partial A}{\partial y_i}$$
und dann
$$y_i = \frac{\partial C}{\partial x_i}$$
setzt, $(AB)C$ hingegen dadurch, dass man diese Handlungen in umgekehrter Folge vornimmt. Nun ist es aber gleichgiltig, in welcher Reihenfolge man diese Handlungen vornimmt; es ist daher
$$(AB)C = A(BC).$$
Durch diese Gleichung ist die Schreibweise ABC für $(AB)C = A(BC)$ gerechtfertigt. Nach dem eben Gesagten ist

(9)
$$ABC = \sum b_{ik} \frac{\partial A}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial C}{\partial x_k} \quad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Ferner wird wegen (6)
$$|ABC| = |(AB)C| = |AB| \cdot |C| = |A| \cdot |B| \cdot |C|$$
oder

(10)
$$|ABC| = |A| \cdot |B| \cdot |C|.$$

Nach dem am Schlusse von 10 Gesagten ist jede Subdeterminante ϱ^{ten} Grades von $|ABC|$ eine homogene lineare ganze Funktion der Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades von $|A|$ bez. von $|B|$ oder $|C|$.

Ist $P = ABC$, so entsteht das Koefficientensystem von P aus den Systemen von A, B und C dadurch, dass es aus ihnen in ganz bestimmter Weise successive zusammengesetzt wird, derart, dass das System von A zuerst mit dem von B, und das so erhaltene System wieder mit dem System von C, oder auch zuerst das System von B mit dem von C, und das neue System mit dem von A — immer in ganz bestimmter Weise — zusammengesetzt wird.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich leicht auf Produkte von vier und mehr Formen ausdehnen. Man hat

$$A(BCD) = (AB)(CD) = (ABC)D = ABCD,$$

u. s. w.

Ist

$$S = \sum s_{ik} x_i y_k, \quad T = \sum t_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

und

(11) $$B = SAT$$

so geht nach (9) B dadurch aus A hervor, dass in A

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \frac{\partial S}{\partial y_i} = s_{1i} x_1 + s_{2i} x_2 + \cdots + s_{ni} x_n \\ y_i &= \frac{\partial T}{\partial x_i} = t_{i1} y_1 + t_{i2} y_2 + \cdots + t_{in} y_n \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots n)$$

gesetzt wird, oder es geht, wie sich Frobenius kurz ausdrückt,* die Form A durch die linearen Substitutionen S und T in die Form B über. Das symbolische Produkt $B = SAT$ erscheint also bei dieser Auffassung als der Ausdruck einer linearen Substitution für jede der zwei Reihen Veränderlicher, wobei nur in der *transformirten Form* B die neuen Veränderlichen wieder mit x_i bez. y_i bezeichnet werden. Nach (10) besteht für die Determinanten der Formen A und B und die *Determinanten der linearen Substitutionen* S und T, wenn $B = SAT$ ist, die Gleichung

$$|B| = |S| \cdot |A| \cdot |T|.$$

Wenn in (11) die Form S das Produkt zweier Formen U und V ist, so heisst die Substitution S ebenfalls das Produkt der beiden Substitutionen U und V oder die aus U und V zusammengesetzte Substitution. Die Systeme der Substitutionskoefficienten der Substitutionen UV, U und V stehen in dem Zusammenhange, dass man das erste aus den beiden letzten durch Composition erhält (10).

Die Substitution UV geht — unsymbolisch gesprochen — aus den Substitutionen U und V dadurch hervor, dass in

$$x'_i = \frac{\partial V}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

für die x_i

$$x_i = \frac{\partial U}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

substituirt wird. Denn man erhält $\frac{\partial UV}{\partial y_i}$, indem man in V die zuletzt angegebene Substitution (12) vornimmt, d. h. UV bildet, und dann nach y_i differentiirt; diese Handlungen dürfen aber auch in umgekehrter

* Crelle's Journ. (79) Bd. 86, S. 149.

Reihenfolge vorgenommen werden, wodurch unsere Behauptung erwiesen ist. Oder auch: die Substitution UV bewirkt, da

$$(UV)A = U(VA)$$

ist, dass in A zuerst für die x_i die Substitution V ausgeführt, und hierauf, wenn in der transformirten Form die neuen Variabelen wieder mit x_i bezeichnet werden, in letzterer für die x_i die Substitution U vorgenommen wird. Ist hingegen, um die Substitution für die y_i zu betrachten,

$$T = UV,$$

so wird in A zuerst die Substitution U, dann in der transformirten Form die Substitution V für die y_i auszuführen sein. — Hier ist also auf die Stellung der Buchstaben genau zu achten, wenn man von der symbolischen zur unsymbolischen Ausdrucksweise übergeht.

Es gilt für unsere symbolischen Produkte aber *nicht*

3. das *commutative Gesetz;* denn die Formen AB und BA sind im Allgemeinen verschieden. Im Falle

$$AB = BA$$

ist, heissen die Formen A und B vertauschbar.

Sind B und C mit A vertauschbar, so ist mit Rücksicht auf 2. oben

$$(12) \quad A(BC) = (AB)C = (BA)C = B(AC) = B(CA) = BCA,$$

und analog ergiebt sich allgemeiner:

Ist jede Form einer Reihe von Formen mit jeder Form einer zweiten Reihe von Formen vertauschbar, so ist auch jede aus den Formen der ersten Reihe zusammengesetzte Form mit jeder aus den Formen der zweiten Reihe zusammengesetzten Form vertauschbar.

4. *Ganze Funktionen einer Form.* Jede Form, welche aus mehreren Formen durch die Operationen der Zusammensetzung, der Multiplikation mit Konstanten, der Addition und Subtraktion (in endlicher Anzahl) gebildet ist, nennen wir mit Frobenius eine ganze Funktion jener Formen. Aus dem letzten Satze folgert man:

Ist jede Form einer Reihe mit jeder Form einer andern Reihe vertauschbar, so ist auch jede ganze Funktion der Formen der einen Reihe mit jeder ganzen Funktion der Formen der zweiten Reihe vertauschbar.

5. *Conjugirte Formen.* Diejenige Form, die aus A entsteht, wenn man x_i und y_i $(i = 1, 2, \dots n)$ vertauscht, wird die zu A conjugirte Form genannt und im Folgenden stets mit A' bezeichnet. Man hat

$$(A')' = A, \quad (aA)' = aA', \quad (A+B)' = A'+B',$$

$$(AB)' = \left(\sum_i \frac{\partial A}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial B}{\partial x_i}\right)' = \sum_i \frac{\partial A'}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial B'}{\partial y_i} = B'A',$$

und weiter

$$(ABC)' = [(AB)C]' = C'(AB)' = C'B'A',$$

allgemein

(13) $$(ABCD\ldots)' = \ldots D'C'B'A'.$$

Ist A mit B vertauschbar, so ist

$$(AB)' = (BA)' = B'A' = A'B',$$

und somit sind auch A' und B' vertauschbar.

Eine Form heisst symmetrisch, wenn sie ihrer conjugirten Form gleich, sie heisst alternirend, wenn sie ihrer conjugirten Form entgegengesetzt gleich ist. Das Koefficientensystem einer symmetrischen Form heisst ebenfalls symmetrisch (7), das einer alternirenden schiefsymmetrisch.

Die Form AA' ist, da nach (13)

$$(AA')' = AA'$$

ist, symmetrisch. Der Koefficient von $x_i y_i$ in AA' ist nach (5)

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2;$$

ist daher A eine Form mit reellen Koefficienten, so ist AA' nur dann identisch Null, wenn

$$A \equiv 0$$

ist. Allgemeiner: Sind a_{ik} und b_{ik} in den Formen A und B conjugirt complexe Grössen, so ist AB' nur dann identisch Null, wenn A identisch Null ist; denn der Koefficient von $x_i y_i$ in AB' ist

$$a_{i1} b_{i1} + a_{i2} b_{i2} + \cdots + a_{in} b_{in},$$

und dieses ist nur dann Null, wenn $A \equiv 0$ ist.

6. Entsteht das System $\mathfrak{C}$ aus zwei Systemen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch Composition, sind die Formen C, A, B bez. die „Bilder" der Systeme $\mathfrak{C}, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ (10), so besteht entweder eine symbolische Gleichung

$$C = AB\,(C' = B'A'),$$

oder eine symbolische Gleichung

$$C = AB'\,(C' = BA'),$$

oder eine symbolische Gleichung

$$C = A'B\,(C' = B'A),$$

oder eine symbolische Gleichung

$$C = A'B'\,(C' = AB),$$

eine Bemerkung, die sich leicht verallgemeinern lässt. Betrachtungen über die Composition von Systemen lassen sich auf diese Weise in

solche über symbolische Produkte von Formen verwandeln. Wir haben in 11 unter 2. und eben hier den Zusammenhang zwischen der Zusammensetzung von *Formen und Systemen* einerseits und der Zusammensetzung von *Formen und Substitutionen* andererseits dargelegt. Aus beiden resultirt ein Zusammenhang zwischen der Zusammensetzung von *Substitutionen und Systemen*, den man sich leicht selbst herstellen wird.

Noch eine wichtige Bemerkung möge hier Platz finden:

Bezeichnet man allgemein das System der Determinante $|A|$ einer Form A mit $\mathfrak{A}$, so kann man die Koefficientensysteme der Formen

$$A + B, \quad A - B, \quad AB, \quad \text{const.}\, A$$

symbolisch bez. mit

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A} - \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B}, \quad \text{const.}\, \mathfrak{A}$$

bezeichnen. Die (symbolische) Rechnung mit Formen kann dann auch aufgefasst werden als ein *symbolisches Rechnen mit Systemen:* $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ heisst die Summe, $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ die Differenz, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ das Produkt der Systeme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; letzteres ist durch die Gleichungen

$$c_{ik} = \sum a_{il} b_{lk} \quad (l = 1, 2 \ldots n)$$

definirt. U.s.w. Ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$, so heissen die Systeme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vertauschbar; doch gelten nicht alle Benennungen über Formen zugleich für Systeme; z. B. nennt man die Systeme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ gewöhnlich nicht conjugirt, sondern man bezeichnet $\mathfrak{A}'$ als das transponirte System von $\mathfrak{A}$. Solche Abweichungen werden besonders hervorgehoben, im Übrigen *können wir uns nach Obigem auf die Rechnung mit Formen beschränken.*

b) Division.

12. Wir setzen

$$X = \sum x_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

und nehmen an, es sei

$$AX \equiv 0;$$

alsdann sind die n^2 Gleichungen [vergl. (5)]

$$a_{i1} x_{1k} + a_{i2} x_{2k} + \cdots + a_{in} x_{nk} \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

durch die x_{ik} erfüllbar, wenn wir A als gegeben annehmen; es muss daher

$$|A| = 0$$

sein. Ist hingegen $|A| \neq 0$, so müssen alle x_{ik} Null sein, wenn $AX \equiv 0$ ist.

Ist AX (XA) identisch Null, und $|A|$ ist nicht Null, so ist X identisch Null.

Setzen wir in der Determinante von A

$$\text{adj. } a_{ik} = \alpha_{ik},$$

so heisst die Form

$$\mathsf{A} = \sum \alpha_{ik} x_k y_i \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

die **adjungirte Form** von A. Setzen wir weiter ein für allemal

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = E,$$

so ist nach (5)

(14) $$A\mathsf{A} = \mathsf{A}A = |A| \cdot E.$$

Ist nun $|A| = 0$, so giebt es keine Form X derart, dass

(15) $$AX = E \quad \text{oder} \quad XA = E$$

ist; denn existirte eine solche, so wäre

$$|AX| = |E|, \quad |A| \cdot |X| = 1, \quad 0 \cdot |X| = 1.$$

Ist aber $A \neq 0$, so genügt nach (14) die Form

$$X = \frac{\mathsf{A}}{|A|}$$

den beiden Gleichungen (15), aber keine andere Form Y. Denn aus

$$AX = E, \quad AY = E$$

folgt

$$A(X - Y) = 0,$$

und da $|A| \neq 0$ ist, muss nach dem obigen Satze

$$X - Y = 0, \quad X = Y$$

sein.

Die durch die Determinante $|A|$ dividirte adjungirte Form A einer gegebenen Form A soll, wenn $|A| \neq 0$ ist, die **reciproke Form** von A heissen und mit

$$A^{-1}$$

bezeichnet werden; sie ist auch durch (15) definirt.

Wir haben

$$|AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1;$$

also ist

(16) $$|A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

Aus

(17) $$AA^{-1} = E, \quad A^{-1}A = E$$

folgt

$$AA^{-1} = A^{-1}A;$$

die Form A ist mit ihrer reciproken Form vertauschbar.

Die Form $X = A$ genügt den Gleichungen

$$XA^{-1} = E, \quad A^{-1}X = E,$$

d. h. *die reciproke Form der reciproken Form ist die ursprüngliche Form.*

Ferner ist wegen (13)

$$(AA^{-1})' = (A^{-1})'A' = E' = E,$$

also per definit.

(18) $$(A')^{-1} = (A^{-1})',$$

d. h. *die reciproke Form der conjugirten Form ist gleich der conjugirten der reciproken Form.*

Aus $AB = E$ folgt

$$A = B^{-1},\quad B = A^{-1},\quad BA = E,\quad AB = BA.$$

Für $A = E$ ergiebt sich

$$E = E^{-1},\quad EE^{-1} = E^{-1}E = E.$$

Ferner ist für jedes A

(19) $$AE = EA = A.$$

Sind die Determinanten zweier Formen A und B nicht Null, so ist mit Rücksicht auf (17) und (19)

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E;$$

$B^{-1}A^{-1}$ genügt also der Gleichung

$$(AB)X = E$$

und ist somit die reciproke Form von AB; in Zeichen:

(20) $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$$

allgemeiner findet man aus (20)

(21) $$(ABCD\ldots)^{-1} = \cdots D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

In Worten:

Ist eine Form mit nicht verschwindender Determinante aus mehreren Formen zusammengesetzt, so ist ihre Reciproke aus den reciproken Formen in umgekehrter Reihenfolge zusammengesetzt.

13. Aus der symbolischen Gleichung

$$B = SAT$$

folgt, wenn $|S|$ und $|T|$ nicht verschwinden, nach 12

$$BT^{-1} = SATT^{-1} = SAE = SA$$

und hieraus analog

$$A = S^{-1}BT^{-1};$$

geht also die Form A durch die Substitutionen S und T, deren Determinanten nicht Null sind, in B über (11), so geht B durch die Substitutionen S^{-1} und T^{-1} in A über; S^{-1} und T^{-1} heissen die zu S bez. T inversen Substitutionen.

Wir nehmen nun 1. an, es sei speciell $S = T'$; dann folgt aus

$$B = T'AT$$

wegen (18):

$$A = (T')^{-1}BT^{-1} = (T^{-1})'BT^{-1},$$

oder für

$$T^{-1} = R, \quad T = R^{-1},$$

$$A = R'BR.$$

Geht eine Form A in eine Form B durch zwei Substitutionen T' und T über, und daher B in A durch zwei Substitutionen R' und R, so heissen die Formen A und B congruent und die Veränderlichen x_i und y_i cogredient. Man sagt dann auch wohl kurz, dass A in B durch die Substitution T übergehe.

Nun nehmen wir 2. an, es sei $S = T^{-1}$; dann folgt aus

$$B = T^{-1}AT,$$

$$A = TBT^{-1} = R^{-1}BR.$$

Geht eine Form A in eine Form B durch zwei Substitutionen T^{-1} und T, so geht auch B durch zwei Substitutionen R^{-1} und R in A über; in diesem Falle heissen die Formen A und B ähnlich, die Veränderlichen x_i und y_i contragredient. Die Substitutionen, welche A in B überführen, heissen im erst aufgeführten Falle congruent (cogredient), im zweiten Falle contragredient. Congruente Substitutionen sind von der Gestalt (11)

$$\left.\begin{array}{l} x_i = t_{i1}x_1' + t_{i2}x_2' + \cdots + t_{in}x_n' \\ y_i = t_{i1}y_1' + t_{i2}y_2' + \cdots + t_{in}y_n' \end{array}\right\} (i = 1, 2, \ldots n),$$

ähnliche dagegen von der Gestalt (11, 12)

$$\left.\begin{array}{r} x_i = s_{1i}x_1' + s_{2i}x_2' + \cdots + s_{ni}x_n' \\ |S|\cdot y_i = \sigma_{1i}y_1' + \sigma_{2i}y_2' + \cdots + \sigma_{ni}y_n' \end{array}\right\} (i = 1, 2, \ldots n),$$

wo

$$\sigma_{ik} = \text{adj. } s_{ik} \quad \text{in} \quad \sum \pm s_{11}s_{22}\ldots s_{nn} = |S|.$$

Aus $B = T'AT$ folgt nach (13)

$$B' = T'A'T.$$

Geht A durch die congruenten Transformationen T', T in B, so geht durch dieselben Transformationen die zu A conjugirte Form in die zu B conjugirte Form über.

Aus $B = T'AT$ folgt ferner für $A' = A$

$$B' = T'A'T = T'AT = B.$$

Sind die Formen A und B congruent, so folgt aus der Symmetrie der einen die Symmetrie der anderen.

Aus $B = T'AT$ folgt endlich für $A' = -A$

$$B' = T'A'T = -T'AT = -B.$$

Sind die Formen A und B congruent, und eine der Formen ist alternirend, so ist es auch die andere.

Aehnliche Transformationen T^{-1}, T führen stets E in sich selbst über; denn man hat

$$T^{-1}ET = T^{-1}T = E.$$

Umgekehrt folgt aus der Gleichung

$$SET = E$$
$$ST = E,$$
$$S = T^{-1}.$$

Aehnliche Substitutionen sind also durch die Eigenschaft, E in sich selbst zu transformiren, vollständig charakterisirt.

Wir machen 3. die Annahmen 1 und 2 gleichzeitig, wir setzen also

(22) $$S = T' = T^{-1}$$

voraus. In diesem Falle heisst T eine orthogonale Form, und man sagt auf Grund der Gleichung

$$B = T'AT = T^{-1}AT,$$

dass A durch die orthogonale Substitution T in B übergehe.

Ist T eine orthogonale Form (Substitution), so ist auch die zu T reciproke Form (inverse Substitution) eine orthogonale Form (Substitution). Denn man hat für $T^{-1} = R$ wegen (22)

$$T = R^{-1}, \quad R' = (T^{-1})' = T = R^{-1}, \quad R' = R^{-1}.$$

Ist $T'ET = E$, so sind die Substitutionen T' und T nicht nur congruent, sondern auch ähnlich; also ist T eine orthogonale Substitution, und umgekehrt.

Sind S und T, U und V congruente (ähnliche) Substitutionen, so gilt das Gleiche für die Substitutionen US und TV; denn es ist

$$S = T', \quad U = V', \quad US = V'T' = (TV)',$$

bez.

$$S = T^{-1}, \quad U = V^{-1}, \quad US = V^{-1}T^{-1} = (TV)^{-1}.$$

Sind T und U orthogonale Formen, so ist auch TU (UT) eine orthogonale Form. Denn man hat

$$T' = T^{-1}, \quad U' = U^{-1}, \quad (TU)' = U'T' = U^{-1}T^{-1} = (TU)^{-1}.$$

Besteht endlich 4. eine symbolische Gleichung

$$B' = T^{-1}AT,$$

so folgt aus ihr

$$TB'T^{-1} = A,$$
$$A' = T'^{-1}BT'$$

Ist die zu B conjugirte Form zu A ähnlich, so ist auch die zu A conjugirte Form ähnlich zu B. In diesem Falle nennen wir die Formen A und B duale Formen; die Variabelen x_i und y_i heissen auch hier contragredient. Sind

$$A = \sum a_{ik} x_i y_k, \quad B = \sum b_{ik} x_i' y_k'$$

duale Formen, so geht A in B durch Substitutionen von der Gestalt

$$x_i = s_{i1} y_1' + s_{i2} y_2' + \cdots + s_{in} y_n'$$
$$|S| \cdot y_i = \sigma_{i1} x_1' + \sigma_{i2} x_2' + \cdots + \sigma_{in} x_n'$$

über; dies geht aus dem unter 1 oben Gesagten und daraus hervor, dass B' in B durch Vertauschen der x_i' und y_i' übergeht.

14. Sind A und B zwei vertauschbare Formen, so hat man, wenn $|B| \neq 0$ ist,

$$AB^{-1} = (B^{-1}B)(AB^{-1}) = B^{-1}(BA)B^{-1}$$
$$= B^{-1}(AB)B^{-1} = B^{-1}A,$$

und somit sind auch A und B^{-1} vertauschbar. Wir setzen dann mit Frobenius* die Form

(23) $$AB^{-1} = B^{-1}A = \frac{A}{B}$$

und nennen dieselbe den Quotienten der Formen A und B. Das Zeichen des Quotienten kann nur dann angewandt werden, wenn A und B vertauschbare Formen sind, da sonst eine Unbestimmtheit einträte. Man hat wegen (6) und (16)

$$|AB^{-1}| = |A| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot |B|^{-1},$$

(24) $$\left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{|B|}.$$

Schliesslich wird wegen (13) und (18) mit Rücksicht auf 11, 5

$$(AB^{-1})' = (B^{-1})'A' = (B')^{-1}A' = A'(B')^{-1}$$

(25) $$\left(\frac{A}{B}\right)' = \frac{A'}{B'}.$$

c) Rationale Funktionen einer Form.

15. Die Form, die entsteht, wenn eine Form A n-mal mit sich selbst zusammengesetzt wird, soll mit A^n bezeichnet und die n^{te} Potenz von A genannt werden. Wegen (12) hat man

(26) $$A^n A^m = A^m A^n = A^{m+n};$$

setzen wir noch

$$A^0 = E,$$

so bleibt (26) auch richtig, wenn m oder n einzeln oder gleichzeitig Null sind, wie aus (19) hervorgeht.

* Crelle's Journ. (78) Bd. 84, S. 8.

Vorstehendes bleibt auch für eine Substitution S giltig. Die Substitution, welche man durch n-maliges Zusammensetzen einer Substitution S mit sich selbst erhält, heisst die n^{te} **Potenz der Substitution** S und wird mit S^n bezeichnet, u. s. w. Diese Bemerkung wolle man auch beim Folgenden berücksichtigen.

Ist $|A| \neq 0$, so entsteht dadurch, dass man A^{-1} n-mal mit sich selbst zusammensetzt, eine Form, die wir mit A^{-n} bezeichnen werden. Die Formel (26) gilt auch für negative Exponenten; da

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

ist (12), so gilt aber auch die Formel (26) dann, wenn die Exponenten m und n entgegengesetzte Zeichen haben.

Für ein beliebiges n ist ferner

$$E^n = E.$$

Ist a eine Konstante, so hat man endlich

$$(aA)^n = a^n A^n.$$

Nun sei

$$g(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n$$

eine ganze Funktion von λ. Die Form

$$a_0A^0 + a_1A^1 + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$$

heisst alsdann eine **ganze Funktion** n^{ten} **Grades von** A und wird mit $g(A)$ bezeichnet werden.

Da nach (13)

$$(A^a)' = (A')^a$$

ist, so ergiebt sich $g(A')$ als die conjungirte Form von $g(A)$; in Zeichen

$$[g(A)]' = g(A').$$

Wegen (26) folgt aus dem Satze in 11, 4, dass jede ganze Funktion $g(A)$ von A mit jeder ganzen Funktion $h(A)$ von A vertauschbar ist. Ist die Determinante von $h(A)$ nicht Null, so heisst der Quotient (14)

$$\frac{g(A)}{h(A)}$$

eine **rationale Funktion** von A und wird, wenn

$$\frac{g(\lambda)}{h(\lambda)} = f(\lambda)$$

gesetzt wird, mit $f(A)$ bezeichnet.

16. Die Determinante

$$|\lambda E - A|$$

heisst die **charakteristische Determinante** (**Funktion**)* der Form A (der Substitution A, des Koefficientensystems von A). Sie ist eine ganze Funktion genau n^{ten} Grades von λ; man kann daher

* Von Frobenius nach Cauchy, Mém. sur l'integration des équations linéaires, Exercises d'analyse et de phys. mat. (40) tome I, p. 53 so genannt.

$$\varphi(\lambda) = |\lambda E - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$$

setzen, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\varphi(\lambda) = 0$$

von A bedeuten, jede so oft gerechnet, als ihre Ordnungszahl angiebt. Ist weiter

$$g(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_m = a(\mu_1 - \lambda)(\mu_2 - \lambda)\ldots(\mu_m - \lambda)$$

eine ganze Funktion m^{ten} Grades von λ $(a_0 \neq 0)$, so wird

$$g(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \cdots + a_mA^0 = a(\mu_1 E - A)\ldots(\mu_m E - A),$$

nach (6) also unter Berücksichtigung der letzten Gleichung in II, 1

$$\begin{aligned} |g(A)| &= a^n |\mu_1 E - A| \cdot |\mu_2 E - A| \cdot \cdots \cdot |\mu_m E - A| \\ &= a^n \varphi(\mu_1)\varphi(\mu_2)\ldots\varphi(\mu_m) \\ &= a(\mu_1 - \lambda_1)\ldots(\mu_m - \lambda_1)\ldots a(\mu_1 - \lambda_n)\ldots(\mu_m - \lambda_n) \\ &= g(\lambda_1)g(\lambda_2)\ldots g(\lambda_n). \end{aligned}$$

Ist $h(\lambda)$ ebenfalls eine ganze Funktion von λ, so ist nach der letzten Gleichung

$$|h(A)| = h(\lambda_1)h(\lambda_2)\ldots h(\lambda_n).$$

Setzen wir wieder

$$f(\lambda) = \frac{g(\lambda)}{h(\lambda)},$$

so wird, wenn $|h(A)| \neq 0$ ist,

$$f(A) = \frac{g(A)}{h(A)}$$

eine rationale Funktion von A (15). Nun ist aber nach (24)

$$|f(A)| = \frac{|g(A)|}{|h(A)|},$$

und somit

(27) $$|f(A)| = \frac{g(\lambda_1)\ldots g(\lambda_n)}{h(\lambda_1)\ldots h(\lambda_n)} = f(\lambda_1)\ldots f(\lambda_n).$$

Nun betrachte man die rationale Funktion (15)

$$\frac{\lambda h(A) - g(A)}{h(A)} = \lambda E - \frac{g(A)}{h(A)} = \lambda E - f(A)$$

von A und wende auf dieselbe die Gleichung (27) an. Man erhält:

$$|\lambda E - f(A)| = [\lambda - f(\lambda_1)][\lambda - f(\lambda_2)]\ldots[\lambda - f(\lambda_n)];$$

in Worten:

*Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von A, so sind $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots f(\lambda_n)$ die der charakteristischen Gleichung einer rationalen Funktion $f(A)$ von A.**

* Vergl. ausser Frobenius, l. c., Borchardt, Crelle's Journ. (46) Bd. 30, S. 41.

17. Sind mehrere Formen $A, B, C, \ldots$ gegeben, so heissen dieselben unabhängig, wenn eine Gleichung

$$aA + bB + cC + \cdots = 0$$

erfordert, dass $a = b = c = \cdots = 0$ ist; im gegentheiligen Falle heissen sie abhängig. Es giebt gerade n^2 unabhängige bilineare Formen von $2n$ Variabelen x_i, y_i. Daher können die Potenzen einer Form nicht alle unabhängig sein. Angenommen, die Formen

$$A^0, A^1, \ldots A^{p-1}$$

seien unabhängig, aber A^p von ihnen abhängig; es sei also etwa

(28) $$\psi(A) = a_0 A^0 + a_1 A^1 + a_2 A^2 + \cdots + a^p A^p = 0,$$

wo $a^p \neq 0$ ist, aber $a_0, a_1, \ldots a_{p-1}$ zum Theil oder sämmtlich Null sein können. Nun setze man die Form $\psi(A)$ mit A^ϱ zusammen; es kommt wegen (7)

(29) $$a_0 A^\varrho + a_1 A^{\varrho+1} + \cdots + a_p A^{p+\varrho} = 0 \; (\varrho = 0, 1, 2, \ldots);$$

betrachte die Reihe

$$S = \frac{A^0}{\lambda} + \frac{A^1}{\lambda^2} + \frac{A^2}{\lambda^3} + \cdots,$$

die für hinreichend grosse Werthe von λ convergirt, und multiplizire dieselbe mit der ganzen Funktion p^{ten} Grades

$$\psi(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \cdots + a_p \lambda^p.$$

Dann heben sich wegen (29) die negativen Potenzen von λ weg, und $S \cdot \psi(\lambda)$ wird eine bilineare Form, deren Koefficienten ganze Funktionen $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades von λ sind. Insofern diese Form von λ abhängt, wollen wir sie mit $G(\lambda)$ bezeichnen; es ist also

$$S\psi(\lambda) = G(\lambda),$$

$$S = \frac{G(\lambda)}{\psi(\lambda)}.$$

Der rationale Bruch $\frac{G(\lambda)}{\psi(\lambda)}$ ist irreducibel. Denn wäre

$$S = \frac{G(\lambda)}{\psi(\lambda)} = \frac{H(\lambda)}{\chi(\lambda)},$$

wo $\chi(\lambda)$ vom Grade $q < p$ ist, so wäre

$$S\chi(\lambda) = H(\lambda),$$

und da hier rechts eine ganze Funktion von λ steht, muss dies auch links der Fall sein. Dazu ist erforderlich und hinreichend, dass der Koefficient von $\frac{1}{\lambda}$ links verschwindet; dann genügte aber die Form A einer Gleichung q^{ten}, also niedrigeren als p^{ten} Grades, gegen die Voraussetzung.

Die Reihe S summirt man wie folgt; es ist

$$SA = \frac{A^1}{\lambda} + \frac{A^2}{\lambda^2} + \cdots,$$

$$S\lambda E = A^0 + \frac{A^1}{\lambda} + \frac{A^2}{\lambda^2} + \cdots,$$

und daher

$$S(\lambda E - A) = A^0 = E,$$

oder (12)

(30) $$S = (\lambda E - A)^{-1} = \frac{A^0}{\lambda} + \frac{A^1}{\lambda^2} + \cdots = \frac{F(\lambda)}{\varphi(\lambda)},$$

wo

$$(-1)^n F(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \ldots\ldots\ldots a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \ldots\ldots a_{2n} & y_2 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} \ldots\ldots a_{n2} & \ldots\; a_{nn} - \lambda & y_n \\ x_1 & x_2 \;\ldots\; x_n & 0 \end{vmatrix}$$

und

$$(-1)^n \varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots\ldots a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = |A - \lambda E|$$

zu setzen ist.

Wir wollen jetzt $\psi(\lambda)$ bestimmen. Nun ist doch

$$S = \frac{F(\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \frac{G(\lambda)}{\psi(\lambda)},$$

wo der zweite Bruch irreducibel ist; der grösste gemeinschaftliche Theiler von $F(\lambda)$ und $\varphi(\lambda)$ heisse $\vartheta(\lambda)$; dann ist

$$\frac{\varphi(\lambda)}{\vartheta(\lambda)} = \psi(\lambda).$$

Damit aber die bilineare Form $F(\lambda)$ durch $\vartheta(\lambda)$ theilbar sei, muss jeder ihrer n^2 Koefficienten durch $\vartheta(\lambda)$ theilbar sein, da die x_i, y_i unbestimmte Grössen sind; $\vartheta(\lambda)$ ist daher der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von $\varphi(\lambda)$, und somit ist

$$\psi(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{\vartheta(\lambda)}$$

der n^{te} Elementartheiler der Determinante $|\lambda E - A|$ (4). Es gilt also der Satz:

7) Ist $\psi(\lambda)$ der n^{te} Elementartheiler der charakteristischen Determinante einer bilinearen Form von $2n$ Variabelen x_i, y_i, so ist

$$\psi(A) = 0$$

*die Gleichung niedrigsten Grades, der die Form A genügt.**

---

* Frobenius, l c. S. 12; SB 1896, S. 601; E. Weyr, Monatsh. für Math. und Phys. (89) Bd. I, S. 187.

Eine Wurzel der Gleichung $\psi(\lambda) = 0$ ist auch eine Wurzel von der Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$; es ist aber auch umgekehrt jede Wurzel von $\varphi(\lambda) = 0$ eine Wurzel von $\psi(\lambda) = 0$ (6, c).

Da ferner

$$\varphi(\lambda) = \psi(\lambda)\vartheta(\lambda)$$

ist, so wird

$$\varphi(A) = \psi(A)\vartheta(A) = 0.$$

Es ist also stets

$$\varphi(A) = 0.*$$

Sind $f(\lambda)$ und $g(\lambda)$ zwei ganze Funktionen von λ, und ist $h(\lambda)$ ihr grösster gemeinschaftlicher Theiler, so kann man bekanntlich zwei ganze Funktionen $F(\lambda)$ und $G(\lambda)$ von λ so bestimmen, dass

$$f(\lambda)G(\lambda) - g(\lambda)F(\lambda) = h(\lambda)$$

ist. Mithin hat man

$$f(A)G(A) - g(A)F(A) = h(A).$$

Nun nehme man $g(\lambda) = \psi(\lambda)$ und setze voraus, dass

$$f(A) = 0$$

sei. Dann folgt, da $\psi(A) = 0$ ist, aus der vorletzten Gleichung

$$h(A) = 0.$$

Da aber $\psi(A) = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades ist, der A genügt, so muss $\psi(\lambda) = \text{const.}\, h(\lambda)$ sein:

*Wenn A einer Gleichung $f(A) = 0$ genügt, so ist $f(\lambda)$ durch $\psi(\lambda)$ theilbar.***

Ist $f(\lambda) = \frac{g(\lambda)}{h(\lambda)}$ und $f(A) = 0$, so ist

$$g(A) = 0,$$

da $h(A)^{-1}$ nicht Null ist (12); nach dem letzten Satze ist also dann $g(\lambda)$ durch $\psi(\lambda)$ theilbar.

Aus dem letzten Satze folgern wir noch:

8) *Ist $f(A) = 0$ eine Gleichung, der A genügt, und $f(\lambda) = 0$ eine Gleichung ohne mehrfache Wurzeln, so hat die charakteristische Funktion von A lauter lineare Elementartheiler.****

Da nämlich nach jenem Satze $f(\lambda)$ durch $\psi(\lambda)$ theilbar ist, so hat auch $\psi(\lambda) = 0$ keine mehrfache Wurzeln; nun ist aber $\psi(\lambda)$ der n^{te} ET von $|\lambda E - A|$, enthält also die ET höchster Potenz dieser Determinante als Faktoren (6, c); daher müssen alle ET von $|\lambda E - A|$ linear sein, w. z. b. w.

---

* Die umfangreiche Literatur über diesen Satz findet man zusammengestellt: Encyklop. der math. Wissenschaften, Leipzig 1899, Bd. I, S. 171, Anm. 23. Obiger Beweis desselben nach Frobenius, Crelle's Journ. (78) Bd. 84, S. 13.

** Frobenius, l. c.

*** Frobenius, l. c., S. 26.

d) Quadratwurzeln aus Formen.*

18. Sei wieder $\psi(\lambda)$ eine ganze Funktion p^{ten} Grades der Veränderlichen λ, die für die Werthe $a, b, c, \ldots$ von λ verschwindet, etwa

$$\psi(\lambda) = \text{const}\,(\lambda-a)^{\alpha}(\lambda-b)^{\beta}(\lambda-c)^{\gamma}\cdots,$$

wo

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots = p$$

ist; ferner seien

$$F(\lambda),\quad G(\lambda),\quad H(\lambda),\cdots$$

ganz beliebige gegebene ganze Funktionen von λ. Nun entwickele man $\frac{F(\lambda)}{\psi(\lambda)}$ nach steigenden Potenzen von $\lambda - a$; es sei dann

$$\frac{A_0}{(\lambda-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(\lambda-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_{\alpha-1}}{\lambda-a}$$
$$=\frac{A_0+A_1(\lambda-a)+\cdots+A_{\alpha-1}(\lambda-a)^{\alpha-1}}{(\lambda-a)^{\alpha}}=\frac{A(\lambda)}{(\lambda-a)^{\alpha}}$$

das Aggregat der mit negativen Exponenten versehenen Glieder der Entwickelung. Analoge Bedeutung habe $\frac{B(\lambda)}{(\lambda-b)^{\beta}}$ für die Entwickelung von $\frac{G(\lambda)}{\psi(\lambda)}$ nach Potenzen von $\lambda - b$ u. s. w. Dann wird

$$\chi(\lambda) = A(\lambda)\frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-a)^{\alpha}}+B(\lambda)\frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-b)^{\beta}}+C(\lambda)\frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-c)^{\gamma}}+\cdots$$

eine ganze Funktion $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades von λ. Die Entwickelung von $\chi(\lambda)$ nach Potenzen von $\lambda - a$ stimmt in den α ersten Gliedern mit der Entwickelung von

$$A(\lambda)\frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-a)^{\alpha}}$$

nach Potenzen von $\lambda - a$ überein; Analoges gilt für die Entwickelung von $\chi(\lambda)$ nach Potenzen von $\lambda - b$, $\lambda - c$ u. s. w. Nun ist

$$\frac{F(\lambda)}{\psi(\lambda)} = \frac{A(\lambda)}{(\lambda-a)^{\alpha}}+R(\lambda),$$

wo $R(\lambda)$ das Aggregat der mit positiven Exponenten versehenen Glieder der Entwickelung von $\frac{F(\lambda)}{\psi(\lambda)}$ vorstellt; daher stimmt die Entwickelung von

$$F(\lambda) = A(\lambda)\frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-a)^{\alpha}}+R(\lambda)\,\psi(\lambda)$$

nach Potenzen von $\lambda - a$ ebenfalls in den α ersten Gliedern mit derjenigen von $A(\lambda)\frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-a)^{\alpha}}$ überein; es ist also, da für die Entwickelung von $G(\lambda)$, $H(\lambda), \ldots$ nach Potenzen von $\lambda - b$, $\lambda - c, \ldots$ Analoges gilt,

---

* Vergl. zu diesem Abschnitt: Frobenius, Ueber die cog. Transf. der bil. Formen, SB 1896, S. 7 flg., § 1.

$$(31)\quad \begin{cases} \chi(a) = F(a), & \chi'(a) = F'(a), \ldots \chi^{(\alpha-1)}(a) = F^{(\alpha-1)}(a), \\ \chi(b) = G(b), & \chi'(b) = G'(b), \ldots \chi^{(\beta-1)}(b) = G^{(\beta-1)}(b), \\ \ldots & \ldots \end{cases}$$

wo $\chi'(a) = \left(\frac{d\chi(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=a}$ u. s. w.

Angenommen $\vartheta(\lambda)$ sei eine ganze Funktion $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades von λ, die auch die durch die Gleichungen (31) ausgedrückte Eigenschaft habe; dann ist

$$\chi(a) - \vartheta(a) = \chi'(a) - \vartheta'(a) = \cdots\cdots = \chi^{(\alpha-1)}(a) - \vartheta^{(\alpha-1)}(a) = 0,$$

u. s. w.; $\chi(\lambda) - \vartheta(\lambda)$ ist also durch $(\lambda - a)^\alpha$, $(\lambda - b)^\beta, \ldots$, mithin auch durch $\psi(\lambda)$ theilbar; $\chi(\lambda) - \vartheta(\lambda)$ ist aber nur $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades, daher

$$\chi(\lambda) - \vartheta(\lambda) = 0,$$
$$\chi(\lambda) = \vartheta(\lambda)$$

sein muss. *Es giebt also nur eine Funktion, welche die Eigenschaft (31) hat.*

19. Man setze jetzt $a, b, c, \ldots$ von Null verschieden voraus, wähle das Vorzeichen von $\sqrt{a}$, $(\sqrt{b}, \sqrt{c}, \ldots)$ beliebig, aber ein für allemal fest, und entwickele $\sqrt{\lambda}$ nach steigenden Potenzen von $\lambda - a$ $(\lambda - b$, $\lambda - c, \ldots)$ in eine Reihe, die mit $\sqrt{a}$, $(\sqrt{b}, \sqrt{c}, \ldots)$ anfängt. Das Aggregat der ersten α $(\beta, \gamma, \ldots)$ Glieder dieser Reihe bezeichnen wir mit $F(\lambda)$ $[G(\lambda), H(\lambda), \ldots]$. Setzen wir $\sqrt{\lambda} = \omega(\lambda)$, so ist also

$$(32)\quad \begin{cases} \omega(a) = F(a), & \omega'(a) = F'(a), \ldots \omega^{(\alpha-1)}(a) = F^{(\alpha-1)}(a), \\ \omega(b) = G(b), & \omega'(b) = G'(b), \ldots \omega^{(\alpha-1)}(b) = G^{(\beta-1)}(b), \\ \ldots & \ldots \end{cases}$$

u. s. w. Jetzt bilden wir *mit den eben gewählten ganzen Funktionen* $F(\lambda)$, $G(\lambda), \ldots$ die Funktion $\chi(\lambda)$ in oben angegebener Weise. Dann wird wegen (31) und (32)

$$\chi(a) = \omega(a), \quad \chi'(a) = \omega'(a), \ldots \chi^{(\alpha-1)}(a) = \omega^{(\alpha-1)}(a),$$
$$\chi(b) = \omega(b), \quad \chi'(b) = \omega'(b), \ldots \chi^{(\beta-1)}(b) = \omega^{(\beta-1)}(b),$$

u s. w. Entwickelt man daher $\chi(\lambda) - \omega(\lambda)$ nach steigenden Potenzen von $\lambda - a$ $(\lambda - b$, $\lambda - c, \ldots)$, so fallen die α $(\beta, \gamma, \ldots)$ ersten Glieder weg. Daher ist die ganze Funktion $\chi(\lambda) - \omega(\lambda)$ durch $(\lambda - a)^\alpha$ $[(\lambda - b)^\beta$, $(\lambda - c)^\gamma, \ldots]$ theilbar, also auch

$$[\chi(\lambda) + \omega(\lambda)]\,[\chi(\lambda) - \omega(\lambda)] = \chi(\lambda)^2 - \omega(\lambda)^2 = \chi(\lambda)^2 - \lambda;$$

die ganze Funktion

$$\chi(\lambda)^2 - \lambda$$

ist durch $\psi(\lambda)$ theilbar.

Nun sei A eine beliebige bilineare Form mit nicht verschwindender Determinante $|A|$; die Gleichung

$$|\lambda E - A| = 0$$

besitzt dann keine Wurzel $\lambda = 0$, also auch nicht die Gleichung $\psi(\lambda) = 0$, wenn $\psi(A) = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades bedeutet, der die Form A genügt (17). Wir können also, dieses $\psi(\lambda)$ oben zu Grunde legend, eine ganze Funktion $\chi(\lambda)^2 - \lambda$ so bestimmen, dass

$$\chi(\lambda)^2 - \lambda = \psi(\lambda) \cdot \tau(\lambda)$$

wird, wo auch $\tau(\lambda)$ eine ganze Funktion von λ vorstellt. Da aber $\psi(A) = 0$ ist, so wird

$$\chi(A)^2 - A = 0,$$

(33)
$$\chi(A)^2 = A.$$

Eine beliebige der auf diese Weise durch bestimmte Wahl der Vorzeichen der Wurzeln $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}, \ldots$ erhaltenen ganzen Funktionen von $\chi(A)$ von A nennen wir mit Frobenius eine Quadratwurzel aus der Form A und setzen symbolisch

(34)
$$\chi(A) = A^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A}.$$

20. Wir wollen jetzt einige Eigenschaften der symbolischen Wurzelausdrücke herleiten. Zunächst ist wegen (6)

$$|\chi(A)^2| = |\chi(A)|^2,$$

also wegen (33)

$$|\chi(A)|^2 = |A|, \quad |\chi(A)| = \pm\sqrt{|A|}$$

oder

(35)
$$|A^{\frac{1}{2}}| = \pm |A|^{\frac{1}{2}}.$$

Die Determinante von $\sqrt{A}$ ist also niemals Null.

Die conjugirte Form von

$$\chi(A)^2 = A$$

ist (15)

$$\chi(A')^2 = A',$$

daher

$$\chi(A') = \sqrt{A'}$$

und

$$[\chi(A)]' = (\sqrt{A})' = \chi(A') = \sqrt{A'}.$$

Unter den verschiedenen Ausdrücken für $\sqrt{A'}$ ist also sicher *einer*, welcher der Gleichung

(36)
$$\sqrt{A'} = (\sqrt{A})'$$

genügt, und unter den verschiedenen Ausdrücken von $(\sqrt{A})'$ *einer*, der gleich $\sqrt{A'}$ ist.

Im gleichen Sinne gilt die Gleichung

(37)
$$\sqrt{A^{-1}} = (\sqrt{A})^{-1} = A^{-\frac{1}{2}}.$$

Es folgt nämlich aus $\chi(A)^2 = A$ nach (20)

$$[\chi(A)^{-1}]^2 = A^{-1}.$$

Ferner findet man mit Hilfe von (37), (18) und (36)

$$(A^{-\frac{1}{2}})' = [(\sqrt{A})^{-1}]' = [(\sqrt{A})']^{-1} = (\sqrt{A'})^{-1},$$

(38) $$(A^{-\frac{1}{2}})' = A'^{-\frac{1}{2}}.$$

Schliesslich hat man wegen (16), (37), (35)

$$|A^{-\frac{1}{2}}| = |(\sqrt{A})^{-1}| = |\sqrt{A}|^{-1} = \pm |A|^{-\frac{1}{2}},$$

$$|A^{-\frac{1}{2}}| = \pm |A|^{-\frac{1}{2}}.$$

e) Differentiation.*

21. Die Koefficienten einer Form

$$A = \sum a_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

seien Funktionen eines Parameters λ; dann ist das Differential

$$dA = \sum (d a_{ik}) x_i y_k$$

ebenfalls eine bilineare Form; ferner ist

$$d(AB) = d\sum \frac{\partial A}{\partial y_i} \frac{\partial B}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial (dA)}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial B}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial A}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial (dB)}{\partial x_i}$$

oder

(39) $$d(AB) = (dA)B + A(dB).$$

Daher ist

$$d(A^2) = (dA)A + A(dA),$$

$$d(ABC) = (dA)BC + A(dB)C + AB(dC),$$

$$d(A^\alpha) = (dA)A^{\alpha-1} + A(dA)A^{\alpha-2} + A^2(dA)A^{\alpha-3} + \cdots + A^{\alpha-1}(dA).$$

Ferner, wenn wieder $E = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$,

$$d(A^0) = dE = 0,$$

also wegen (38), wenn $|A| \neq 0$ ist,

$$0 = d(AA^{-1}) = Ad(A^{-1}) + (dA)A^{-1},$$

und schliesslich

$$d(A^{-1}) = -A^{-1}(dA)A^{-1};$$

z. B. ist, wenn die a_{ik} von λ unabhängig sind,

$$d(\lambda E - A)^{-1} = -(\lambda E - A)^{-1} d(\lambda E - A)(\lambda E - A)^{-1},$$

(40) $$d(\lambda E - A)^{-1} = -(\lambda E - A)^{-2} d\lambda.$$

Für das symbolische Rechnen mit Systemen (11) sei bemerkt, dass, wenn $\mathfrak{A}$ das System von A, unter $d\mathfrak{A}$ das System von

$$\sum (d a_{ik}) x_i y_k$$

zu verstehen ist.

---

* Frobenius, Crelle's Journ. (78) Bd. 84, l. c. § 4.

f) Zerlegbare Formen.*

22. Kommen die Variabelen x_α, $x_\beta \ldots$ in der Form A nicht vor, so kommen sie auch nicht in der Form AB vor, also auch nicht in ABC, $ABCD$. Wenn die Veränderlichen $y_\alpha y_\beta \ldots$ in D fehlen, so fehlen sie auch in CD, in BCD, in $ABCD$. Allgemein:

a) *In einem symbolischen Produkte fehlen die Veränderlichen x_i, welche im ersten Faktor, und die Veränderlichen y_k, welche im letzten Faktor nicht auftreten.*

Eine Form A heisst **zerlegbar**, wenn sie ein Aggregat von Formen $A_1, A_2, \ldots$ ist, von denen keine zwei eine Variabele gemein haben, $A_1, A_2, \ldots$ heissen die **Theile** der zerlegbaren Form A. Für die Entwickelungen und Sätze über zerlegbare Formen, die wir nachstehend geben, ist es erforderlich, dass jeder Theil einer zerlegbaren Form, wofern er nicht an und für sich von gleichviel Veränderlichen x_i und y_i abhängt, durch Hinzufügen von Gliedern mit Koefficienten Null zu einer Form gemacht wird, für welche dieses zutrifft. — Z. B. ist die Form

$$x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_3 y_3$$

von $2 \cdot 3$ Veränderlichen x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 in die Theile

$$A_1 = x_1 y_1 + x_2 y_1$$

und

$$A_2 = x_3 y_2 + x_3 y_3$$

zerlegbar. Nach der eben getroffenen Bestimmung müssen wir sie als eine von $2 \cdot 4$ Variabelen abhängige Form auffassen; denn wir haben

$$A_1 = x_1 y_1 + x_2 y_1 + 0 x_1 y_2' + 0 x_2 y_2',$$
$$A_2 = 0 x_2' y_2 + 0 x_2' y_3 + x_3 y_2 + x_3 y_3$$

zu setzen, so dass bei passender Bezeichnung der Variabelen

$$(41) \quad A = \overbrace{x_1 y_1 + 0 x_1 y_2 + x_2 y_1 + 0 x_2 y_2}^{A_1} + \overbrace{0 x_3 y_3 + 0 x_3 y_4 + x_4 y_3 + x_4 y_4}^{A_2}$$

wird. — Die Form $E = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ ist u. A. in die Theile

$$A_1 = x_1 y_1, \quad A_2 = x_2 y_2, \cdots$$

zerlegbar.

Ist A in die Theile $A_1, A_2, \cdots, B$ in die Theile $B_1, B_2, \ldots$ so zerlegbar, dass A_i dieselben Variabelen enthält, wie $B_i (i = 1, 2, \ldots)$, so heissen A und B **in derselben Weise zerlegbar**. E ist ebenso zerlegbar, wie jede andere zerlegbare Form. Sind

$$A = \sum A_\varrho, \quad B = \sum B_\varrho \quad (\varrho = 1, 2, \ldots)$$

in derselben Weise zerlegbar, dann ist für $\varrho \neq \sigma$

* Frobenius, l. c. § 5.

$$A_\varrho B_\sigma = 0,$$

weil in B_σ alle Variabelen fehlen, die in A_ϱ auftreten. Daher ist mit Rücksicht auf (8)

$$AB = \sum A_\varrho B_\varrho \quad (\varrho = 1, 2, \ldots),$$

und $A_\varrho B_\varrho$ enthält nur Veränderliche, die in A_ϱ und B_ϱ auftreten. Allgemeiner hat man:

b) *Sind mehrere Formen in gleicher Weise zerlegbar, so ist ihr Produkt in derselben Weise zerlegbar.*

Ist $A = A_1 + A_2$, so ist

(42) $$|A| = |A_1| \cdot |A_2|;^*$$

allgemein:

c) *Die Determinante einer zerlegbaren Form ist das Produkt der Determinanten ihrer Theile.*

In obigem Beispiele (41) ist nicht nur die Determinante $|A|$ 4ten Grades, sondern es sind auch die beiden Determinante 2ten Grades $|A_1|$, $|A_2|$ Null.

Jede von Null verschiedene Determinante ϱ^{ten} Grades des Systems von $|A|$, deren System nicht den Systemen von $|A_1|$ und $|A_2|$ angehört, ist das Produkt einer Determinante $(\varrho - \sigma)^{\text{ten}}$ Grades des Systems von $|A_1|$ und einer Determinante σ^{ten} Grades des Systems von $|A_2|$. Ist also r_1 (r_2) der Rang von $|A_1|$ ($|A_2|$), so giebt es (mindestens) eine Subdeterminante $(r_1 + r_2)^{\text{ten}}$ Grades von $|A|$, die nicht Null ist, aber keine höheren Grades; daher ist der Rang von $|A|$ gleich $r_1 + r_2$; allgemein:

d) *Der Rang des Koefficientensystems einer zerlegbaren Form ist gleich der Summe der Rangzahlen der Koefficientensysteme ihrer Theile.*

Ist A zerlegbar, so ist E und daher auch $\lambda E - A$ in derselben Weise zerlegbar; also gilt der Satz (Satz c oben):

e) *Die charakteristische Funktion einer zerlegbaren Form ist das Produkt der charakteristischen Funktionen ihrer Theile.*

Ein System $\mathfrak{A}$ heisst zerlegbar in die Theile $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$, wenn das Bild A des Systems $\mathfrak{A}$ in die Theile $A_1, A_2, \ldots$ zerlegbar ist, wo $A_1, A_2, \ldots$ bez. die Bilder von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ sind. Die Sätze b)—e) gelten nicht nur für Formen, sondern auch m. m. für Systeme.

---

* $|A_i|$ bedeutet die Determinante der Form A_i, betrachtet als Form der in ihr auftretenden $2m_i$ Variabelen, wenn A von $2n$, A_1 von $2m_1$, A_2 von $2m_2$ Variabelen abhängt, und $m_1 + m_2 = n$ ist. Analoges gilt bei mehr als zwei Theilformen.

§ 3. Systeme mit ganzzahligen Elementen.

23. Wir betrachten in diesem Paragraphen *nur* solche Systeme, deren n^2 Elemente a_{ik} *ganze positive oder negative Zahlen bez. Null sind.* Dem entsprechend treten hier nur *Formen mit ganzzahligen Koefficienten* auf (10 zu Anfang).

Geht eine solche Form $A = \sum a_{ik} x_i y_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots n)$ durch die linearen Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} x_i &= s_{1i} x_1' + s_{2i} x_2' + \cdots + s_{ni} x_n' \\ y_i &= t_{i1} y_1' + t_{i2} y_2' + \cdots + t_{in} y_n' \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots n)$$

mit ganzzahligen Koefficienten s_{ik}, t_{ik} in eine Form

$$B = \sum b_{ik} x_i' y' \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

über, so sagt man, dass die Form B unter der Form A enthalten sei. Setzt man

$$\left.\begin{aligned} S &= \sum s_{ik} x_i y_k \\ T &= \sum t_{ik} x_i y_k \end{aligned}\right\} \quad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

so wird symbolisch, wenn wir in B für x_i', y_i' bez. x_i, y_i schreiben (11)

$$B = SAT$$

und

$$|B| = |S| \cdot |A| \cdot |T|.$$

Das Koefficientensystem von B ist aus denen von S, A, T in ganz bestimmter Weise zusammengesetzt (11).

Entsteht ein System mit ganzzahligen Elementen aus zwei oder mehreren ebensolchen Systemen durch Composition, so heisst dasselbe ein Vielfaches jedes der Systeme, aus denen es zusammengesetzt ist. Nach dem eben Gesagten gilt der Satz:

Ist eine Form B unter einer Form A enthalten, so ist das Koefficientensystem von B ein Vielfaches desjenigen von A. Umgekehrt hat man aber auch den Satz:

Ist ein System von n^2 Elementen b_{ik} ein Vielfaches eines Systems von n^2 Elementen a_{ik}, so ist die Form:

$$B = \sum b_{ik} x_i y_k$$

unter der Form $A = \sum a_{ik} x_i y_k$ enthalten.

Nach Artikel 11, 6 ist nämlich B (bei richtiger Bezeichnung der Veränderlichen) dann ein symbolisches Produkt von der Gestalt

$$B = KL \ldots AUV \ldots;$$

es wird also für

$$KL \cdots = S,$$
$$UV \cdots = T,$$
$$B = SAT,$$

d. h. B ist unter A enthalten, w. z. b. w. Aus diesem Beweise geht zugleich hervor:

Ist ein System $\mathfrak{B}$ ein Vielfaches eines Systems $\mathfrak{A}$, so kann es stets aus $\mathfrak{A}$ so erzeugt werden, dass man $\mathfrak{A}$ vorn und hinten (11, 6) mit je *einem* Systeme zusammensetzt.

24. Ist ein System $\mathfrak{B}$ Vielfaches eines Systems $\mathfrak{A}$, so ist jede Subdeterminante ϱ^{ten} Grades von $\mathfrak{B}$ eine homogene ganze lineare Funktion der Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades von $\mathfrak{A}$ [10, a)]. Wenn daher eine Primzahl p im grössten gemeinschaftlichen Theiler aller Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades $D'_\varrho(D_\varrho)$ von $\mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ zur Potenz $l'_\varrho(l_\varrho)$ auftritt, so ist

$$l'_\varrho \geqq l_\varrho;$$

daher ist D'_ϱ ein Vielfaches von D_ϱ. Bedeutet $r'(r)$ den Rang von $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$), so muss

(1) $$r' \leqq r$$

sein.

Unser Fundamentalsatz II in 8 besagt ferner, *dass der ϱ^{te} Elementartheiler E'_ϱ von $\mathfrak{B}$ ein Vielfaches des ϱ^{ten} Elementartheilers E_ϱ von $\mathfrak{A}$ ist.*

Bedeuten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ganze Zahlen, so hat man also

$$E'_\varrho = \alpha_\varrho E_\varrho \quad (\varrho = 1, 2, \ldots r').$$

Nun ist aber

$$E'_1 = D'_1 = \alpha_1 E_1 = \alpha_1 D_1,$$

$$D'_1 = \alpha_1 D_1,$$

$$E'_2 = \frac{D'_2}{D'_1} = \alpha_2 \frac{D_2}{D_1},$$

also

$$D'_2 = \alpha_1 \alpha_2 D_2,$$

u. s. w., schliesslich

$$D'_\varrho = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\varrho D_\varrho \quad (\varrho = 1, 2, \ldots r').$$

Auch aus Theorem II ergiebt sich somit die Theilbarkeit von D'_ϱ durch D_ϱ.

Wir wollen im Folgenden eine Form mit dem Koefficientensystem $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ mit $A(B)$ bezeichnen. Ist B unter A enthalten, so ist $\mathfrak{B}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{A}$ (23) und somit D'_ϱ durch D_ϱ, E'_ϱ durch E_ϱ theilbar ($\varrho \leqq r'$). Wenn also für $\varrho = 1, 2, \ldots r'$ zwar D'_ϱ durch D_ϱ, aber *nicht* E'_ϱ durch E_ϱ theilbar ist, so kann $\mathfrak{B}$ *nicht* Vielfaches von $\mathfrak{A}$ (B *nicht* unter A enthalten) sein. *Wenn aber E'_ϱ (ganzes) Vielfaches von E_ϱ ist,*

so ist auch 𝔅 Vielfaches von 𝔄 (B unter A enthalten), wie wir im Folgenden zeigen werden. Damit ist dann die *Umkehrung von Theorem II* für ganzzahlige Systeme bewiesen.

25. Ist die Form B unter der Form A enthalten und zugleich A unter B, so heissen die Formen A und B äquivalent. Ist das System 𝔅 ein Vielfaches des Systems 𝔄 und zugleich 𝔄 ein Vielfaches von 𝔅, so heissen die Systeme 𝔄 und 𝔅 ebenfalls äquivalent.

Alle Formen, die einer bestimmten Form äquivalent sind, bilden eine Klasse von Formen. Eine Form (ein System) heisst elementar oder irreducibel, wenn sie (es) weder selbst zerlegbar noch einer zerlegbaren Form (einem zerlegbaren Systeme) äquivalent ist (22), im entgegengesetzten Falle reducibel. Aus dieser Definition folgt, dass jede Form einer solchen äquivalent ist, die in lauter elementare Formen zerlegbar ist. Eine in lauter elementare Formen zerlegbare Form heisst eine reducirte Form. Nach dem eben Gesagten giebt es in jeder Formenklasse reducirte Formen. Analoges gilt für Systeme. Mit der Transformation (Umformung) einer Form (eines Systems) in eine äquivalente reducirte Form (in ein äquivalentes reducirtes System), oder, wie man sich ausdrückt, mit der Reduktion einer Form (eines Systems) werden wir uns demnächst beschäftigen.

Sind zwei Formen A und B äquivalent, so ist, wenn wir die in 24 eingeführten Bezeichnungen beibehalten, nach (1) einerseits

$$r' \leqq r,$$

andererseits

$$r \leqq r',$$

also ist

$$r = r';$$

ferner ist D'_ϱ ein Vielfaches von D_ϱ, und umgekehrt, also ist*

$$D'_\varrho = D_\varrho \quad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

und analog

$$E'_\varrho = E_\varrho \quad (\varrho = 1, 2, \ldots n);$$

also:

8a) Sind zwei Formen A und B (zwei Systeme 𝔄 und 𝔅) äquivalent, so sind die Koefficientensysteme 𝔄 von A und 𝔅 von B (die Systeme 𝔄 und 𝔅) von gleichem Range r, und es stimmt der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten ϱ^{ten} *Grades des Systems 𝔄 mit demjenigen aller Subdeterminanten* ϱ^{ten} *Grades des Systems 𝔅 für* $\varrho = 1, 2, \ldots r$ *überein.*

---

* Abgesehen vom Vorzeichen; dieser Zusatz darf als selbstverständlich auch im Folgenden wegbleiben.

Oder:

8b) Sind zwei Formen A und B (zwei Systeme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$) äquivalent, so stimmt der 1te, 2te, ... n^{te} Elementartheiler des Koefficientensystems $\mathfrak{A}$ von A (des Systems $\mathfrak{A}$) bez. mit dem 1ten, 2ten, ... n^{ten} Elementartheiler des Koefficientensystems $\mathfrak{B}$ von B (des Systems $\mathfrak{B}$) überein, oder, anders ausgedrückt, *die Systeme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ stimmen im Range und in den Elementartheilern überein.*

Zur zweiten Fassung unseres Satzes vergl. 6, c).

26. Ist die Determinante (der Modul) einer linearen Substitution mit ganzzahligen Koefficienten gleich ± 1, so heisst dieselbe eine unimodulare Substitution, das System der Koefficienten ein Einheitssystem. Ist S eine unimodulare Substitution, so ist S^{-1} eine Form mit ganzzahligen Koefficienten (12), und da nach Gleichung (16) daselbst

$$|S^{-1}| = |S|^{-1} = \pm 1,$$

so ist S^{-1}, d. h. die zu S inverse Substitution ebenfalls eine unimodulare Substitution (das System von S^{-1} ist also ebenfalls ein Einheitssystem).

Sind die Substitutionen $S, T, U, V\ldots$ unimodular, so ist es auch die aus ihnen zusammengesetzte Substitution (11, 2)

$$Q = STUV\ldots,$$

denn es ist dann

$$|Q| = |S|\cdot|T|\cdot|U|\cdot|V|\cdots = \pm 1.$$

Nun gehe die Form A durch die Substitutionen S und T in die Form B über, es sei also symbolisch

$$B = SAT. \tag{2}$$

Ist nun

$$|S| = \pm 1, \quad |T| = \pm 1,$$

dann folgt aus (2)

$$A = S^{-1}BT^{-1},$$

wo die Substitutionen S^{-1}, T^{-1} ganzzahlige Koefficienten besitzen. *Die Formen A und B sind also äquivalent*, und es gilt somit nach 25 der Satz:

9) Geht eine Form in eine andere durch unimodulare Substitutionen über, so stimmen Rang und Elementartheiler der Koefficientensysteme beider Formen überein.

Das System von B entsteht aus dem von A dadurch, dass letzteres vorn und hinten mit Einheitssystemen zusammengesetzt wird.

Entsteht ein System $\mathfrak{B}$ (einer Form B) aus dem Systeme $\mathfrak{A}$ (einer Form A) dadurch, dass $\mathfrak{A}$ mit Einheitssystemen, etwa gemäss der symbolischen Gleichung (11, 2)

$$B = PQ \ldots AUV \ldots,$$

wo $|P|$, $|Q| \ldots |U|$, $|V| \ldots$ gleich ± 1, componirt wird, so sind die Formen A und B äquivalent, da A in B durch die unimodularen Substitutionen

$$S = PQ \ldots, \quad T = UV \ldots$$

in B übergeht. *Die Systeme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind dann ebenfalls äquivalent* (23), und es gilt der Satz (25):

10) Ein System aus ganzzahligen Elementen bleibt im Range und den Elementartheilern ungeändert, wenn man es vorn und hinten mit beliebig vielen Einheitssystemen zusammensetzt.

27. Wir betrachten jetzt unimodulare Substitutionen *einfachster Art*:

a) Setzen wir in A

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \ldots x_i = -x_i', \quad x_{i+1} = x_{i+1}', \ldots x_n = x_n',$$
$$y_i = y_i' \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

so liegen unimodulare Substitutionen S und T vor, und die Form A geht durch dieselben in eine Form B über, deren Koefficientensystem $\mathfrak{B}$ sich von demjenigen $\mathfrak{A}$ von A nur dadurch unterscheidet, dass die Elemente einer Reihe ihr *Vorzeichen gewechselt haben.* Das Koefficientensystem von S ist ein Einheitssystem, welches nur in der Diagonale von Null verschiedene Elemente hat, und zwar hier lauter $+1$, ausser dem i^{ten} Element, das -1 ist. Das System von T ist ein Einheitssystem, das nur in der Diagonale von Null verschiedene Elemente und zwar hier lauter $+1$ enthält. Die Zusammensetzung dieser Einheitssysteme mit $\mathfrak{A}$ gemäss der Gleichung

$$B = SAT$$

bewirkt aber den angegebenen Zeichenwechsel in $\mathfrak{A}$.

b) Setzen wir in A

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \ldots x_i = x_{i+1}', \quad x_{i+1} = x_i', \quad x_{i+2} = x_{i+2}', \ldots x_n = x_n',$$
$$y_i = y_i' \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

so bewirken diese beiden unimodularen Substitutionen eine blosse *Reihenvertauschung* im Koefficientensysteme von A. Man gebe die Beschaffenheit der Einheitssysteme an, welche die Koefficientensysteme dieser Substitutionen vorstellen.

c) Setzen wir endlich in A

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \ldots x_k = x_k' + m x_s', \quad x_{k+1} = x_{k+1}', \ldots x_n = x_n',$$
$$y_i = y_i' \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

wo $s \gtrless k$ und m eine ganze positive oder negative Zahl ist, so haben wir unimodulare Substitutionen vor uns; das System $\mathfrak{B}$ der transformirten

Form B geht dadurch aus demjenigen $\mathfrak{A}$ von A hervor, *dass man die Reihe*

$$a_{k1}\ a_{k2}, \ldots a_{kn}$$

mit m multiplizirt und zur parallelen Reihe

$$a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{in}$$

addirt bez. von ihr subtrahirt.

Auch hier beachte man die Beschaffenheit der Einheitssysteme, durch deren Zusammensetzung mit $\mathfrak{A}$ man $\mathfrak{B}$ erhält.

Die unter a), b) und c) beschriebenen Transformationen einer Form A, sowie die entsprechenden Umformungen ihres Systems $\mathfrak{A}$ bezeichnet man als Elementartransformationen der Form A (des Systems $\mathfrak{A}$); da die Elementartransformationen einer Form (eines Systems) unimodulare Substitutionen sind (durch Zusammensetzen des Systems mit Einheitssystemen bewirkt werden), so folgt aus den Sätzen in 26, *dass der Rang r des Koefficientensystems $\mathfrak{A}$ einer Form A (eines Systems $\mathfrak{A}$) sowie der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades von $\mathfrak{A}$ ($\varrho = 1, 2, \ldots r$), oder, dass der Rang und die ET von $\mathfrak{A}$ ungeändert bleiben, wenn man die Form A (das System $\mathfrak{A}$) beliebig vielen Elementartransformationen unterwirft.**

28. Wir werden jetzt folgenden Satz** beweisen:

Jedes System von n^2 ganzzahligen Elementen a_{ik} lässt sich durch alleinige Anwendung von Elementartransformationen in ein solches verwandeln, in welchem nur in der Diagonale von Null verschiedene Elemente stehen, und in welchem jedes von Null verschiedene Diagonalelement positiv und Theiler des folgenden ist.

Beweis. Durch alleinige Anwendung von Elementartransformationen a) und b) kann man zunächst erreichen, dass das erste Diagonalelement α positiv und kleiner, als der absolute Werth jedes von Null verschiedenen Elementes unseres Systems wird. Befindet sich jetzt in der ersten Zeile oder Spalte ein Element β, welches nicht ganzes Vielfaches von α ist, so können wir an Stelle von α noch ein kleineres Element bringen, welches nicht Null ist. Durch weitere Anwendung einer Elementartransformation a) bewirken wir zunächst,

---

* Alles in diesem Artikel Gesagte gilt nicht nur für ganzzahlige Systeme, sondern auch für solche, deren Elemente ganze Funktionen einer oder mehrerer Variabelen sind, nur hat man dann unter m entsprechend eine ganze Funktion einer bez. mehrerer Veränderlichen zu verstehen. (Vergl. den Beweis der Sätze 8) in 25.)

** Smith, Phil. Trans. 1861 (62), vol. 151, S. 314; Frobenius, Crelle's Journ. (79) Bd. 86, S. 158; Kronecker, Crelle's Journ. (91) Bd. 107, S. 135—136. Obiger Beweis ist im Wesentlichen der Kronecker'sche.

dass β positiv ist. Ist dann q der grösste gemeinschaftliche Theiler von α und β, so besteht ein Algorithmus

$$\begin{aligned}\beta' &= h\alpha + \gamma,\\ \alpha &= l\gamma + \delta,\\ &\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\\ \varsigma &= p\eta + q,\\ \eta &= rq,\end{aligned}$$

wo $h, l, \ldots, \gamma, \delta \ldots$ ganze Zahlen bedeuten. Man kann daher durch wiederholte Anwendung von Elementartransformationen c) an Stelle von α bez. β das Element $q\,(<\alpha)$ und dieses, wenn es an die Stelle von β trat, durch eine Elementartransformation b) an die erste Diagonalstelle bringen. Durch diesen Process wurde nicht nur das erste Diagonalelement verkleinert, sondern es giebt auch jetzt in der ersten Zeile bez. Spalte ein weiteres Element — an der Stelle von β —, welches Vielfaches des ersten ist. Dieses Verfahren setzen wir so lange fort, bis das erste Diagonalelement Theiler aller übrigen Elemente der ersten Zeile und Spalte ist. Dann machen wir durch Elementartransformationen c) die letzteren Elemente alle zu Null. Giebt es alsdann in dem so erhaltenen Systeme noch ein Element, welches nicht Vielfaches des ersten Diagonalelementes ist, so bringen wir es durch Reihenaddition in die erste Zeile oder Spalte und verkleinern das erste Diagonalelement nach dem oben beschriebenen Verfahren noch weiter. Nun kann aber letzteres Element bei fortgesetzter Verkleinerung nicht kleiner werden, als der grösste gemeinschaftliche Theiler* t_1 aller Elemente des gegebenen Systems, der ja durch Elementartransformationen nicht geändert wird (27). Also muss der Process schliesslich dahin führen, dass ein System T_1 erscheint, in welchem das erste Diagonalelement gerade t_1 wird, und welches in der ersten Zeile und Spalte ausser t_1 nur Elemente Null enthält.

Ist jetzt t_2 der grösste gemeinschaftliche Theiler der Elemente des Systems T_2, welches aus T_1 entsteht, indem man in ihm die erste Zeile und Spalte weglässt, so können wir auf die vorstehend beschriebene Weise das System T_2 durch Elementartransformationen — die zugleich als Elementarformationen des ganzen Systems T_1 aufgefasst werden können — so umformen, dass das erste Diagonalelement gleich t_2, also Theiler aller übrigen Elemente desselben wird, und in der ersten Zeile und Spalte ausser ihm nur

* Den grössten gemeinschaftlichen Theiler aller Subdeterminanten eines gewissen Grades wählen wir stets positiv.

Elemente Null stehen; t_2 ist durch t_1 theilbar. U. s. w. — Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man also in der That zu einem Systeme, in welchem nur die r ersten Diagonalelemente $t_1, t_2, \dots t_r$ von Null verschieden sind und t_2 durch t_1, t_3 durch $t_2, \dots t_r$ durch t_{r-1} theilbar ist, wobei r den Rang des gegebenen Systems bedeutet; da nämlich der Rang eines Systems durch Elementartransformationen nicht geändert wird (27), so muss der Process mit dem r^{ten} Diagonalelemente abbrechen. — Damit ist unser Satz bewiesen.

Ein System, welches nur in der Diagonale von Null verschiedene Elemente hat, heisst ein Diagonalsystem. Vorstehend haben wir gezeigt, wie man ein gegebenes System in ein äquivalentes Diagonalsystem transformirt. Wir können nun die zusammengesetzten Elementartheiler $E_\varrho = \frac{D_\varrho}{D_{\varrho-1}}$ des gegebenen Systems, die ja mit denen unseres Diagonalsystems übereinstimmen [25, Satz b)], sofort angeben. Es ist nämlich, wenn wir unsere alten Bezeichnungen (4) beibehalten, für unser Diagonalsystem

$$\begin{array}{cccccc} t_1 & 0 & 0 & \dots\dots & & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & \dots\dots & & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & \dots\dots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0\dots 0 & & t_r & 0\dots 0 & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$D_1 = t_1, \quad D_2 = t_1 t_2, \dots, D_r = t_1 t_2 \dots t_r,$$

also

$$E_1 = t_1, \quad E_2 = t_2, \dots, E_r = t_r, \quad E_{r+1} = \dots = E_n = 0.$$

*Die Diagonalelemente $t_1, \dots t_r$ sind also bez. der erste, zweite, ... r^{te} ET unseres gegebenen Systems vom Range r.** Die oben beschriebene Umformung eines Systems führt daher immer zu *demselben* Diagonalsysteme. Wir können das erlangte Resultat auch so aussprechen (26, 27):

Eine gegebene bilineare Form

$$\sum a_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \dots n),$$

deren Koefficientensystem die zusammengesetzten Elementartheiler

$$E_1, E_2, \dots E_n$$

* Zugleich ergiebt sich hier, dass E_ϱ durch $E_{\varrho-1}$ ($\varrho \leq r$) theilbar ist, wie dies durch den Fundamentalsatz I bereits bewiesen ist.

besitzt, lässt sich durch unimodulare Substitutionen für die x_i und y_i stets in die Form

$$E_1 x_1' y_1' + E_2 x_2' y_2' + \cdots + E_n x_n y_n'$$

transformiren.

Die Form $\sum E_i x_i' y_i'$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ ist in die Theile

$$E_i x_i' y_i' \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

zerlegbar; jeder dieser Theile ist weder zerlegbar, noch einer zerlegbaren Form äquivalent; denn wäre $E_i x_i' y_i'$ einer zerlegbaren Form äquivalent, so wäre nach den Sätzen c), d) in 22 und 8a) in 25 der Rang des Systems dieser Form grösser als Eins. Die Form $\sum E_i x_i' y_i'$ ist also eine reducirte Form, da sie in lauter elementare Formen zerlegbar ist. Wir haben also vorstehend *die Reduktion einer Form mit ganzzahligen Koefficienten (eines Systems mit ganzzahligen Elementen)*, die in 25 angekündigt wurde, *wirklich ausgeführt.*

29. Mit Hilfe der eben angegebenen Reduktion einer Form (eines Systems) sind wir im Stande, die *Umkehrung von Theorem II für ganzzahlige Systeme höchst einfach zu beweisen.* Es seien A und B zwei bilineare Formen mit den Koefficientensystemen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Die Systeme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien ganzzahlig und so beschaffen, dass der ϱ^{te} ET E_ϱ' von $\mathfrak{B}$ ein Vielfaches des ϱ^{ten} ETs E_ϱ von $\mathfrak{A}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots n)$ ist. Es sei also

(3) $$E_\varrho' = \delta_\varrho E_\varrho \quad (\varrho = 1, 2, \ldots n),$$

wo die δ_ϱ ganze Zahlen bez. Null sind. Es soll gezeigt werden, dass $\mathfrak{B}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{A}$ ist:

Nach Artikel 28 giebt es Substitutionen (Formen) S, T, U, V, deren Determinanten ± 1 sind, derart, dass symbolisch

$$E_1 x_1 y_1 + E_2 x_2 y_2 + \cdots + E_n x_n y_n = SAT,$$
$$E_1' x_1 y_1 + E_2' x_2 y_2 + \cdots + E_n' x_n y_n = UBV$$

wird. Setzen wir jetzt

$$R_1 = \sum E_i x_i y_i, \qquad R_2 = \sum E_i' x_i y_i \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

sodass also

(4) $$R_1 = SAT,$$

(5) $$R_2 = UBV$$

ist und führen noch die Form

$$\delta_1 x_1 y_1 + \delta_2 x_2 y_2 + \cdots + \delta_n x_n y_n = D$$

ein, so ist wegen (3)

(6) $$R_2 = DR_1 = R_1 D.$$

Aus (5) und (6) folgt aber

$$B = U^{-1} R_2 V^{-1} = U^{-1} D R_1 V^{-1} = U^{-1} R_1 D V^{-1},$$

und somit ist wegen (4)

(7) $$B = (U^{-1}DS)A(TV^{-1}) = (U^{-1}S)A(TDV^{-1}).$$

Da nicht nur S und T, sondern auch U^{-1}, V^{-1} und D Formen mit ganzzahligen Koefficienten sind, so ist wegen Gleichung (7) das System $\mathfrak{B}$ von B Vielfaches des Systems $\mathfrak{A}$ von A (11, 23), w. z. b. w.

Setzen wir noch die Formen

$$U^{-1}DS = P, \quad TV^{-1} = Q, \quad U^{-1}S = X, \quad TDV^{-1} = Y,$$

so wird (7) zu

(8) $$B = PAQ = XAY.$$

Die Systeme von Q und X sind Einheitssysteme; es hat sich also zugleich ergeben, dass für das eine der beiden Systeme, mit welchen componirt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ übergeht, stets ein Einheitssystem gewählt werden kann. Die Gleichung (8) besagt, dass B unter A enthalten ist (23), wenn E'_ϱ ein Vielfaches von E_ϱ ist. Zugleich ergab sich, dass alsdann für eine der beiden Substitutionen, welche A in B überführen, eine unimodulare gewählt werden kann.

Nehmen wir die Ergebnisse dieses Artikels mit denen in Artikel 8 zusammen, so können wir sie in folgende Sätze fassen:

IIIa. Ein System $\mathfrak{B}$ von n^2 ganzzahligen Elementen ist dann und nur dann Vielfaches eines ebensolchen Systems $\mathfrak{A}$, wenn der ϱ^{te} Elementartheiler von $\mathfrak{B}$ ein Vielfaches des ϱ^{ten} Elementartheilers von $\mathfrak{A}$ ist für $\varrho = 1, 2, \dots n$.

IIIb. Eine Form $B = \sum b_{ik} x_i y_k$ $(i, k = 1, 2, \dots n)$ mit ganzzahligen Koefficienten ist unter einer ebensolchen Form $A = \sum a_{ik} x_i y_k$ $(i, k = 1, 2, \dots n)$ dann und nur dann enthalten, wenn jeder von Null verschiedene zusammengesetzte Elementartheiler des Koefficientensystems von B durch den entsprechenden Elementartheiler des Koefficientensystems von A theilbar ist.*

30. Es sei nun insbesondere der ϱ^{te} ET des Systems $\mathfrak{B}$ von B gleich dem ϱ^{ten} ET des Systems $\mathfrak{A}$ von A für $\varrho = 1, 2, \dots . n$. Alsdann kann man nach 29 durch unimodulare Substitutionen die Formen A und B in dieselbe reducirte Form

$$R_1 = R_2$$

transformiren; es wird dann eben

* Smith, Phil. Trans. 1861 (62), vol. 151, S. 320; Proc. of the Lond. math. soc. (73) vol. IV, S. 244. Frobenius, Crelle's Journ. (80) Bd. 88, S. 114. Hensel, Crelle's Journ. (95) Bd. 114, S. 100.

$$D = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = E$$

und daher werden die Substitutionen

$$P = X = U^{-1}S, \quad Q = Y = TV^{-1},$$

in (8) alle unimodular. A und B sind also dann äquivalent (26). Wir haben daher mit Rücksicht auf den Satz 8b) in 25 das Theorem:

IVa. Zwei Formen $A = \sum a_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$

und

$$B = \sum b_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

mit ganzzahligen Koefficientensystemen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (zwei Systeme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$) sind dann und nur dann äquivalent, wenn die entsprechenden zusammengesetzten Elementartheiler von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleich sind, oder was dasselbe besagt, wenn die Systeme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ im Range und in den einfachen Elementartheilern übereinstimmen.

Sind zwei Formen A und B äquivalent, so kann man, da ihre Koefficientensysteme in den zusammengesetzten ETn übereinstimmen (IVa), nach unseren obigen Entwickelungen A in B (ebenso B in A) stets durch unimodulare Substitutionen transformiren; auch das Umgekehrte ist giltig (26).

Nennt man daher zwei Formen A und B äquivalent, wenn A in B (und somit auch B in A) durch unimodulare Substitutionen transformirt werden kann, so deckt sich diese zweite, scheinbar engere Definition der Äquivalenz vollständig mit der früher (25) gegebenen. Analoges gilt bezüglich der Definition der Aequivalenz von Systemen.

Stimmen für zwei Systeme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von gleichem Range r die Zahlen D'_ϱ und D_ϱ (25) überein, so stimmen auch die Zahlen E_ϱ und E'_ϱ — also auch die einfachen ET von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ — überein; somit kann man dem Theoreme IVa mit Rücksicht auf Satz 8a) in 25 die folgende Fassung geben:

IVb. Zwei Formen A und B von $2n$ Variabelen mit ganzzahligen Koefficientensystemen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (zwei Systeme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$) sind dann und nur dann äquivalent, wenn die Systeme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (sie) von gleichem Range sind, und der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades von $\mathfrak{A}$ mit demjenigen aller Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades von $\mathfrak{B}$ für

$$\varrho = 1, \ldots, r$$

übereinstimmt.

Auf *rationalem Wege* lässt sich also entscheiden, ob zwei Formen (Systeme) äquivalent sind oder nicht, und auf *rationalem Wege* lassen sich (28)* die unimodularen Substitutionen (Einheitssysteme) ermitteln, welche eine Form in eine zu ihr äquivalente Form überführen (mit denen zusammengesetzt ein System in ein äquivalentes übergeht).

31. Wir stellen uns nun folgende *Aufgabe:***

In der bilinearen Form

$$h_1 x_1 y_1 + h_2 x_2 y_2 + \cdots + h_r x_r y_r = H$$

seien $h_1, h_2, \ldots, h_r$ ganz beliebige von Null verschiedene ganze Zahlen. Es sollen die ET ihres Koefficientensystems bestimmt werden.

Ist speciell h_2 durch h_1, h_3 durch h_2 u. s. w. theilbar, so sind $h_1, h_2, \ldots h_r$, wie wir in 28 sahen, gerade die zusammengesetzten ET des Systems von H. Man erhält dann die einfachen ET, indem man $h_1, h_2, \ldots h_r$ in Faktoren zerlegt, die Potenzen verschiedener Primzahlen sind (4). Wir werden zeigen, dass man auch im allgemeinen Falle beliebiger h_i die einfachen ET durch eine solche Zerlegung der h_i erhält.

Es sei p eine Primzahl, die in

$$h_1 h_2, \ldots, h_r = D_r$$

aufgeht; p stecke in h_ϱ zur Potenz l_ϱ. Nun ordnen wir die Zahlen l_ϱ nach fallender Grösse und bezeichnen sie dann der Reihe nach mit

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r.$$

Infolge dieser Bezeichnung enthält D_r die Primzahl p zur Potenz

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r,$$

die Subdeterminanten $(r-1)^{\text{ten}}$ Grades des Koefficientensystems von H enthalten p zur Potenz

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{r-1},$$

eine aber enthält p genau zu dieser Potenz. Der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten $(r-1)^{\text{ten}}$ Grades enthält also p zur Potenz

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{r-1},$$

D_r enthält p zur Potenz

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r,$$

also enthält

$$E_r = \frac{D_r}{D_{r-1}}$$

p zur Potenz α_r. Analog beweist man, dass

---

* Die Substitutionen können auch direkt durch Auflösen linearer Gleichungen gefunden werden (vergl. 39).

** Vergl. Frobenius, Theorie der linearen Formen mit ganzen Koefficienten, Crelle's Journ. (79) Bd. 86, § 6.

$$E_{r-1} = \frac{D_{r-1}}{D_{r-2}}$$

p zur Potenz α_{r-1} enthält, u. s. w. Die Potenzen

$$p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, \ldots, p^{\alpha_r}$$

sind daher die zur Basis p gehörenden einfachen ET von H (4). Also:

11) Man findet die Elementartheiler eines Systems

$$\begin{array}{cccc} h_1 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & h_2 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots h_n \end{array}$$

vom Range r, indem man jede der r von Null verschiedenen Zahlen aus demselben in Faktoren zerlegt, die Potenzen verschiedener Primzahlen sind.

Die allgemeinere Fassung unseres Ergebnisses folgt daraus, dass durch Zufügen von Nullreihen der Rang und die ET eines Systems ungeändert bleiben.

Nachdem man, wie oben angegeben wurde, die einfachen ET des Systems einer Form $h_1 x_1 y_1 + \cdots + h_r x_r y_r$, das vom Range r sei, bestimmt hat, kann man nach 6, c) auch leicht die zusammengesetzten ET desselben berechnen. Man erhält darnach die letzteren ET aus den $h_1, \ldots h_r$ wie folgt: Man zerlegt $h_1, h_2, \ldots h_r$ in Faktoren, die Potenzen verschiedener Primzahlen $p, q, r, \ldots$ sind. Das Produkt der höchsten Potenzen von $p, q, r, \ldots$ ist der r^{te} ET E_r des Systems, das Produkt der zweithöchsten Potenzen von $p, q, r, \ldots$ der $(r-1)^{\text{te}}$ ET E_{r-1} des Systems, u. s. w. *Somit ist E_r das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und* E_1, wie bekannt, *der grösste gemeinschaftliche Theiler der Zahlen $h_1, h_2, \ldots h_r$.* Es erscheint also hier der Begriff der zusammengesetzten Elementartheiler als eine *Verallgemeinerung der Begriffe des grössten gemeinschaftlichen Theilers und des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen auf Systeme von mehr als zwei Zahlen.*

32. Die Form $A = \sum a_{ik} x_i y_k$ sei in die Theilformen A_1 und A_2 zerlegbar (22). Die Systeme $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ von A, A_1, A_2 seien bez. vom Range r, l, m; dann ist nach Satz c) in 22

$$r = l + m.$$

Die von Null verschiedenen zusammengesetzten ET von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$?? seien bez.

$$h_1,\quad h_2, \ldots h_l$$
und
$$h_{l+1},\quad h_{l+2}, \ldots h_r.$$

Dann giebt es nach 28 unimodulare Substitutionen S, T, U, V derart, dass
$$h_1 x_1 y_1 + h_2 x_2 y_2 + \cdots + h_l x_l y_l = S A_1 T,$$
$$h_{l+1} x_{l+1} y_{l+1} + h_{l+2} x_{l+2} y_{l+2} + \cdots + h_r x_r y_r = U A_2 V$$
wird. Daraus folgt aber

(9) $$h_1 x_1 y_1 + \cdots + h_l x_l y_l + h_{l+1} x_{l+1} y_{l+1} + \cdots + h_r x_r y_r$$
$$= (S+U)(A_1 + A_2)(T+V),$$
wenn man berücksichtigt, dass
$$S A_1 V = S A_2 T = S A_2 V = U A_1 T = U A_1 V = U A_2 T = 0$$
wird, weil nämlich die Variabelen, welche in S, T, A_1 auftreten, in U, V, A_2 fehlen. Setzen wir nun
$$S + U = P, \quad T + V = Q,$$
so wird (9), da $A = A_1 + A_2$ ist, zu
$$h_1 x_1 y_1 + h_2 x_2 y_2 + \cdots + h_r x_r y_r = PAQ.$$
P und Q sind aber zerlegbare Formen; daher ist [22, Satz c)]
$$|P| = |S| \cdot |U| = \pm 1, \quad |Q| = |T| \cdot |V| = \pm 1;$$
P und Q sind also unimodulare Substitutionen. *Man kann also unter den gemachten Voraussetzungen durch unimodulare Substitutionen* A_1 *in*
$$H_1 = h_1 x_1 y_1 + \cdots + h_l x_l y_l,$$
A_2 *in*
$$H_2 = h_{l+1} x_{l+1} y_{l+1} + \cdots + h_r x_r y_r$$
und $A = A_1 + A_2$ *in*
$$H_1 + H_2 = h_1 x_1 y_1 + \cdots + h_r x_r y_r = H$$
überführen.

Nun stimmen aber die ET von A, A_1, A_2 bez. mit den ETn der Koefficientensysteme $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ von H, H_1, H_2 überein (26); man erhält aber nach 31 die ET vom $\mathfrak{H}_1$, indem man h_1, $h_2, \ldots h_l$, die von $\mathfrak{H}_2$, indem man h_{l+1}, $h_{l+2}, \ldots h_r$, und die von $\mathfrak{H}$, indem man h_1, $h_2, \ldots h_r$ in Faktoren zerlegt, die Potenzen verschiedener Primzahlen sind. Daher sind die ET von $\mathfrak{H}$ diejenigen von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ zusammengenommen, und es gilt somit das Fundamentaltheorem:*

V. Die Elementartheiler des Koefficientensystems einer zerlegbaren Form (eines zerlegbaren Systems) sind diejenigen der Koefficientensysteme ihrer Theile (diejenigen seiner Theile) zusammengenommen.

---

* Frobenius, l. c. S. 164.

33. Wir geben zum Schlusse dieses Paragraphen noch einige für spätere Verwendung nöthige Entwickelungen über zerlegbare Formen.

Sei wieder die Form A in die Theile A_1 und A_2 zerlegbar, sei ferner ϱ eine positive ganze Zahl, die nicht grösser als der Rang r des Systems $\mathfrak{A}$ von A ist; endlich bedeute D_ϱ, $D_\varrho^{(1)}$, $D_\varrho^{(2)}$ bez. den grössten gemeinschaftlichen Theiler aller Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, wo noch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ die Systeme von A_1 und A_2 vorstellen. Ist ϱ grösser als der Rang $r_1(r_2)$ von $\mathfrak{A}_1(\mathfrak{A}_2)$, so denken wir uns $D_\varrho^{(1)}(D_\varrho^{(2)})$ gleich Null gesetzt. Wir behaupten alsdann:

D_ϱ ist der grösste gemeinschaftliche Theiler der Zahlen

$$D_\varrho^{(1)},\ D_{\varrho-1}^{(1)} D_1^{(2)},\ D_{\varrho-2}^{(1)} D_2^{(2)}, \ldots D_1^{(1)} D_{\varrho-1}^{(2)},\ D_\varrho^{(2)}.$$

Beweis. Jede Subdeterminante ϱ^{ten} Grades $S_{\varrho-m,m}$ aus $\mathfrak{A}$, welche nicht dem Systeme $\mathfrak{A}_1$ oder $\mathfrak{A}_2$ angehört, ist das Produkt einer Subdeterminante $(\varrho-m)^{\text{ten}}$ Grades von $\mathfrak{A}_1$ und einer Subdeterminante m^{ten} Grades von $\mathfrak{A}_2$; es giebt umgekehrt stets eine Subdeterminante ϱ^{ten} Grades von $\mathfrak{A}$, welche das Produkt zweier Subdeterminanten $(\varrho-m)^{\text{ten}}$ Grades und m^{ten} Grades von $\mathfrak{A}_1$ bez. $\mathfrak{A}_2$ ist. Steckt also für ein bestimmtes m die Primzahl p in $D_{\varrho-m}^{(1)}$ zur Potenz α_1, in $D_m^{(2)}$ zur Potenz α_2, so steckt sie in allen Subdeterminanten $S_{\varrho-m,m}$ zur Potenz $\alpha_1+\alpha_2$ und zu keiner höheren; daher ist $D_{\varrho-m}^{(1)} D_m^{(2)}$ der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten $S_{\varrho-m,m}$; dies gilt für $m=1,2,\ldots \varrho-1$; die in $\mathfrak{A}_1$ bez. $\mathfrak{A}_2$ auftretenden Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades aber haben per def. den grössten gemeinschaftlichen Theiler $D_\varrho^{(1)}$ bez. $D_\varrho^{(2)}$; also ist D_ϱ der grösste gemeinschaftliche Theiler der Zahlen

$$D_\varrho^{(1)},\ D_{\varrho-1}^{(1)} D_1^{(2)}, \ldots D_\varrho^{(2)},$$

w. z. b. w. Für $\varrho = r$ folgt sofort, *dass der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten r^{ten} Grades von $\mathfrak{A}$ gleich dem Produkte des grössten gemeinsamen Theilers aller Subdeterminanten $r_1{}^{\text{ten}}$ Grades von $\mathfrak{A}_1$ in den grössten gemeinsamen Theiler aller Subdeterminanten $r_2{}^{\text{ten}}$ Grades von $\mathfrak{A}_2$ ist, wenn das System $\mathfrak{A}$ vom Range r in die Systeme $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ vom Range r_1 bez. r_2 zerlegbar ist.*

Die Ausführungen dieses *Artikels* gelten m. m. auch dann, wenn die Elemente von $\mathfrak{A}$ ganze Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen sind.

§ 4. Systeme, deren Elemente ganze Funktionen einer Veränderlichen sind.

34. Die Entwickelungen des letzten Paragraphen gelten mit geringen Modifikationen auch für Systeme (Formen), deren Elemente (Koefficienten) *ganze Funktionen einer Veränderlichen λ sind.* Die Begriffe „Enthaltensein unter einer Form" („Vielfaches eines Systemes"), „Aequivalenz", „Elementartransformation" u. s. w. werden hier, wie früher in 23—25 und 27, definirt, nur dass also hier „ganze Funktion einer Veränderlichen λ" für „ganze Zahl" zu setzen ist. An Stelle der unimodularen Substitutionen treten jetzt solche Substitutionen, deren Koefficienten ganze Funktionen von λ sind, deren Determinanten jedoch von λ unabhängig und nicht Null sind. An Stelle der Einheitssysteme treten Systeme, deren Elemente ganze Funktionen einer Veränderlichen λ sind, und deren Determinanten die oben angegebenen Eigenschaften besitzen. Nimmt man die angegebenen Veränderungen in 23—33 vor, so bleiben die Entwickelungen und Sätze daselbst im Uebrigen bestehen, denn da z. B. der Algorithmus zur Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers für ganze Zahlen und ganze Funktionen einer Veränderlichen derselbe ist, so gilt die Kroneckersche Reduktion eines Systems in 28 nicht blos für Systeme mit ganzzahligen Koefficienten, sondern auch für die hier betrachteten Systeme, deren Elemente ganze Funktionen einer Veränderlichen sind: der Grad des ersten Diagonalelementes wird so lange erniedrigt, bis dasselbe Theiler aller übrigen Elemente der ersten Zeile und Spalte wird, dann macht man durch Elementartransformationen c) alle die letzteren Elemente dieser beiden Reihen Null, u. s. w. — *Insbesondere aber gelten die* auf jene Reduktion sich stützenden *Fundamentalsätze IIIa und IIIb, IVa und IVb auch für Systeme (Formen), deren Elemente (Koefficienten) ganze Funktionen einer Variabelen λ sind.** Zwei solche Formen kann man auch äquivalent nennen, wenn die eine in die andere durch Substitutionen übergeführt werden kann, deren Koefficienten ganze Funktionen von λ sind, deren Determinanten aber von λ unabhängig und nicht Null sind.

Auf Grund des Theorems IVb kann, da die Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von ganzen Funktionen einer Variabelen durch rationale Operationen geschieht, auch hier *auf rationalem Wege über die Aequivalenz zweier Formen entschieden werden,*

---

* Frobenius, Crelle's Journ. (79) Bd. 86, S. 202 und (80) Bd. 88, S. 110; Hensel, Crelle's Journ. (95) Bd. 114, S. 100.

und auf rationalem Wege können (28, 30)* die Substitutionen gefunden werden, welche eine Form in eine äquivalente transformiren. U. s. w.

Hervorgehoben werde schliesslich noch *die Giltigkeit des Fundamentalsatzes V über die Elementartheiler zerlegbarer Systeme* für die hier betrachteten Systeme.

35. Sind die Koefficienten einer bilinearen Form ganze Funktionen α^{ten} Grades einer Variabelen λ, so soll α der Grad der bilinearen Form** heissen. Analog wird man den Begriff „Grad eines Systems" einführen, um dann auch die folgenden Ergebnisse für Systeme in Sätze fassen zu können. Da derartige Uebertragungen genügend oft in § 3 und § 4 ausgeführt wurden, dürfen wir uns auf Formen beschränken. Eine bilineare Form α^{ten} Grades A lässt sich stets auf die Gestalt

$$A = A_0 \lambda^\alpha + A_1 \lambda^{\alpha-1} + \cdots + A_\alpha$$

bringen, wo $A_1, A_2, \ldots A_\alpha$ bilineare Formen sind, deren Koefficienten nicht von λ abhängen, und A_0 nicht identisch Null ist.

Ist B eine bilineare Form β^{ten} Grades, und wir setzen, wie vorstehend,

$$B = B_0 \lambda^\beta + B_1 \lambda^{\beta-1} + \cdots + B_\beta,$$

so ist, wenn

$$|B_0| \neq 0$$

ist, das symbolische Produkt

$$AB = A_0 B_0 \lambda^{\alpha+\beta} + (A_0 B_1 + A_1 B_0) \lambda^{\alpha+\beta-1} + \cdots$$

von A und B eine bilineare Form genau vom $(\alpha+\beta)^{\text{ten}}$ Grade. Denn $A_0 B_0$ kann, wenn $|B_0|$ nicht Null ist, nur dann identisch verschwinden, wenn A_0 identisch verschwindet (12), was gegen die Voraussetzung verstösst. Allgemeiner beweist man analog, wenn C eine weitere bilineare Form vorstellt, den Satz:

a) *Der Grad der Form ABC ist gleich der Summe der Grade von A, B und C, wenn in zwei Faktoren des symbolischen Produktes die Determinanten der Formen, welche mit den höchsten Potenzen von λ multiplizirt sind, nicht verschwinden.*

Wir behalten die Bezeichnungen bei und beweisen einen weiteren Satz:

b) *Ist $\beta \leqq \alpha$ und $|B_0|$ nicht Null, so giebt es eine und nur eine Form Q vom Grade $\alpha - \beta$ und eine Form C von niedrigerem als β^{ten} Grade, welche der Gleichung*

$$A = QB + C \quad \text{oder} \quad A = BQ + C$$

Genüge leisten.

---

* Vergl. S. 54, Anm. 1.

** Frobenius, Crelle's Journ. (79) Bd. 86, S. 202.

Setzt man nämlich
$$\alpha - \beta = \gamma,$$
so hat man die Form
$$Q = Q_0\lambda^\gamma + Q_1\lambda^{\gamma-1} + \cdots + Q_\gamma$$
so zu bestimmen, dass der Grad der Form
$$A - QB = C$$
kleiner als β wird. Nun ist aber
$$A - QB = (A_0 - Q_0B_0)\lambda + (A_1 - Q_0B_1 - Q_1B_0)\lambda^{\alpha-1} + \cdots$$
$$+ (A_\gamma - Q_0B_\gamma - Q_1B_{\gamma-1} - \cdots - Q_\gamma B_0)\lambda^\beta + \cdots.$$

Daher müssen die Koefficienten von $\lambda^\alpha, \lambda^{\alpha-1}, \ldots \lambda^\beta$ verschwinden; es muss also
$$A_0 = Q_0B_0,$$
$$A_1 = Q_0B_1 + Q_1B_0, \ldots, A_\gamma = Q_0B_\gamma + Q_1B_{\gamma-1} + \cdots + Q_\gamma B_0$$
sein. Da $|B_0| \gtrless 0$ vorausgesetzt wird, so ergiebt sich aus vorstehenden Gleichungen
$$Q_0 = A_0B_0^{-1},\quad Q_1 = (A_1 - Q_0B_1)B_0^{-1} = A_1B_0^{-1} - A_0B_0^{-1}B_1B_0^{-1},$$
u. s. w. Daher sind die Formen $Q_0, Q_1, \ldots Q_\gamma$ und damit Q und C vollständig bestimmt. Analog findet man die Formen Q und C, welche die Gleichung $A = BQ + C$ erfüllen.

36. Von besonderem Interesse sind diejenigen Formen, deren Koefficienten ganze Funktionen *ersten* Grades einer Variabelen λ sind. Sind
$$A = \sum a_{ik}x_iy_k,\quad B = \sum b_{ik}x_iy_k\quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$
zwei solche Formen, so können wir, wie oben,
$$A = \lambda A_0 + A_1,\quad B = \lambda B_0 + B_1$$
setzen, wo also A_0, A_1, B_0, B_1 von λ unabhängige Formen vorstellen. Ist die Determinante $|A_0|$ von A_0 nicht Null, so kann die Determinante $|A|$ von A nicht für jeden Werth von λ verschwinden; denn man hat
$$|A| = |\lambda A_0 + A_1| = \lambda^n|A_0| + \cdots + |A_1|.$$

Ueber zwei bilineare Formen ersten Grades gilt nun folgendes Theorem von Weierstrass:*

* Weierstrass, BM 1868, S. 312—314 (Ges. Werke Bd. II, S. 21—22); C. Jordan, Compt. rend. 1871, II. sér. pag. 787 und Liouville's Journ. 1874, S. 35; Hamburger, Crelle's Journ. (73) Bd. 76, S. 113; Darboux, Liouville's Journ. 1874, S. 347; Kronecker, BM 1874, S. 216 flg. [Ges. Werke Bd. I, S. 391 flg.]; Gundelfinger in Hesse's Vorl. über anal. Geom. des Raumes, 3. Aufl. 1876, IV. Supplem.; Stickelberger, Crelle's Journ. (79) Bd. 86, S. 20 flg.; Predella, Le omogr. in uno spaz. ad un num. qual. di dimens. Ann. di mat. 1889—90,

VI. Wenn die Formen $A = \lambda A_0 + A_1$ und $B = \lambda B_0 + B_1$ so beschaffen sind, dass die Determinanten $|A_0|$ und $|B_0|$ nicht verschwinden, und die Elementartheiler der Determinanten $|\lambda A_0 + A_1|$ und $|\lambda B_0 + B_1|$ übereinstimmen, so kann man jede dieser Formen in die andere durch Substitutionen transformiren, die nicht Null sind, und deren Koefficienten nicht von λ abhängen.

Beweis. Die Systeme der Determinanten $|A|$ und $|B|$ sind von gleichem Range n; ausserdem stimmen ihre ET überein; folglich sind die Formen A und B äquivalent (Theorem IVa in 30, 34), und zwar können auf rationalem Wege zwei solche Substitutionen P_0 und Q_0 gefunden werden, dass symbolisch

$$B = P_0 A Q_0 \tag{1}$$

ist, wobei die Koefficienten der Formen P_0 und Q_0 im Allgemeinen von λ abhängig, ihre Determinanten aber von λ unabhängig und nicht Null sind (30, 34). Die zu P_0 und Q_0 inversen Substitutionen

$$P_0^{-1} = R_0, \quad Q_0^{-1} = S_0$$

sind von gleicher Beschaffenheit, wie P_0 und Q_0. Aus (1) folgt zunächst

$$P_0 A = B S_0, \quad A Q_0 = R_0 B.$$

Jetzt bestimmen wir Formen $P, P_1, Q, Q_1, R, R_1, S, S_1$ so, dass

$$P_0 = B P_1 + P, \quad Q_0 = Q_1 B + Q,$$
$$R_0 = A R_1 + R, \quad S_0 = S_1 A + S$$

und der Grad von P, Q, R, S niedriger wird, als der Grad von B bez. A (35, Satz b). Da hier A und B Formen ersten Grades sind, so sind die Formen P, Q, R, S *von λ unabhängig.* Dann wird

$$P_0 A = B S_0 = B(S_1 A + S) = B S_1 A + B S,$$
$$P_0 A = (B P_1 + P) A = B P_1 A + P A,$$

also

$$B P_1 A + P A = B S_1 A + B S,$$
$$B(P_1 - S_1) A = B S - P A.$$

Da $|B_0|$ und $|A_0|$ nicht Null sind, so ist der Grad der zuletzt links stehenden Form nach 35, Satz a) mindestens gleich Zwei, der Grad

---

Ser. II, Bd. XVII, § 10; Calò, Dimost. algebr. del teorema di Weierstrass sul. forme bil., Ann. di mat. 1895. Diese Autoren beweisen das Theorem mit Benutzung der Wurzeln der Gleichungen $|\lambda A_0 + A_1| = 0$ und $|\lambda B_0 + B_1| = 0$, also auf nicht rationalem Wege. Den obigen Beweis, bei welchem die Wurzeln jener Gleichung (die einf. ET.) nicht expl. auftreten und überhaupt nur rationale Operationen vorkommen, gab Frobenius, Crelle's Journ. Bd. (79) 86, S. 202—204.

der rechts stehenden Form ist aber höchstens gleich Eins, daher müssen in der letzten Gleichung die rechts und links stehenden Formen verschwinden, und zwar muss (12)

(2) $$P_1 - S_1 = 0, \quad BS - PA = 0$$

sein. Nun ist aber für

$$E = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

daher ist

$$Q_0 S_0 = E;$$

$$E = Q_0(S_1 A + S) = Q_0 S_1 A + (Q_1 B + Q)S$$
$$= Q_0 S_1 A + Q_1 BS + QS$$

und wegen (2) somit

$$E - QS = Q_0 S_1 A + Q_1 PA$$

oder

(3) $$E - QS = (Q_0 S_1 + Q_1 P)A.$$

Die Form links in (3) ist von λ unabhängig, die in (3) rechts stehende enthält λ in den Koefficienten mindestens linear (35, Satz a), daher muss (12)

$$Q_0 S_1 + Q_1 P = 0, \quad QS = E$$

sein. Die Form S ist nach der letzten Gleichung die zu Q reciproke Form. Daher hat man

(4) $$QS = SQ = E,$$

und es ist weder $|Q|$ noch $|S|$ Null. Jetzt folgt aber aus (2) und (4)

$$PAQ = BSQ = BE = B;$$

da $|B|$ nicht Null ist, so ist es auch $|P|$ nicht. Die symbolische Gleichung

(5) $$B = PAQ$$

besagt aber, dass A in B durch zwei Substitutionen P und Q übergeht; die Koefficienten derselben sind von λ unabhängig, ihre Determinanten nicht Null; daher ist unser Satz bewiesen.

Aus (5), oder anders geschrieben, aus

$$\lambda B_0 + B_1 = P(\lambda A_0 + A_1)Q$$

oder

$$\lambda B_0 + B_1 = \lambda PA_0 Q + PA_1 Q$$

folgt, da diese Gleichung für jedes λ gilt und die in ihr auftretenden Formen von λ unabhängig sind,

$$B_0 = PA_0 Q, \quad B_1 = PA_1 Q.$$

Die Uebereinstimmung der ET der Determinanten

$$|\lambda A_0 + A| \quad \text{und} \quad |\lambda B_0 + B_1|$$

ist die nothwendige (26, 34) und, wenn die Determinanten $|A_0|$ und $|B_0|$ nicht verschwinden, auch die hinreichende Bedingung dafür, dass

man Substitutionen P, Q angeben kann, deren Determinanten nicht Null sind, und die *sowohl* A_0 *in* B_0, *als* A_1 *in* B_1 überführen. Ueber die Uebereinstimmung der ET wird *auf rationalem Wege* entschieden (34), und *nur rationale Operationen* brauchen angewandt zu werden, um im Falle der Aequivalenz der Formen $\lambda A_0 + A_1$ und $\lambda B_0 + B_1$ die Substitutionen P und Q zu finden (vergl. 34 und vorstehenden Beweis), welche A_0 in B_0, A_1 in B_1, also *jede Form der Schaar* (1)

(6) $$\lambda_1 A_0 + \lambda_2 A_1$$

in die entsprechende Form der Schaar

(7) $$\lambda_1 B_0 + \lambda_2 B_1$$

überführen. Dabei wurde die Einschränkung gemacht, dass $|A_0|$ und $|B_0|$ (oder auch $|A_1|$ und $|B_1|$) von Null verschieden sind. Um nun die analogen Fragen auch im allgemeineren Falle, wo nur vorausgesetzt wird, dass *die Determinanten der betrachteten Schaaren (6) und (7) nicht identisch Null sind, wo aber die Determinanten beider Grundformen jeder Schaar Null sein können,* zu erledigen, müssen wir die ET der Determinanten $|\lambda_1 A_0 + \lambda_2 A_1|$ und $|\lambda_1 B_0 + \lambda_2 B_1|$ ins Auge fassen, also zur *homogenen Betrachtungsweise* übergehen. Wir nehmen dabei den Ausgang vom allgemeineren Falle, wo die Koefficienten einer bilinearen Form (Elemente eines Systems) homogene ganze Funktionen gleich hohen Grades zweier Veränderlichen $\lambda_1 | \lambda_2$ sind.

§ 5. Systeme, deren Elemente binäre Formen gleichen Grades sind.

37. Es sei $A = \sum a_{ik} x_i y_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots n)$ eine bilineare Form, deren Koefficienten *homogene ganze Funktionen* α^{ten} *Grades zweier Veränderlichen* $\lambda_1 | \lambda_2$ sind. Führen wir dann in A an Stelle der Veränderlichen $\lambda_1 | \lambda_2$ durch die lineare Substitution

(1) $$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda g + g' \\ \lambda_2 = \lambda h + h', \end{cases}$$

wo
$$gh' - g'h$$

nicht Null ist, eine Variabele (einen Parameter) λ ein, so geht A in eine Form der im letzten Paragraphen betrachteten Art über, die wir mit $\bar{A}$ bezeichnen wollen. Durch (1) geht nicht nur $|A|$ in $|\bar{A}|$, sondern auch jede Subdeterminante ϱ^{ten} Grades S_ϱ von $|A|$ in die entsprechende Subdeterminante ϱ^{ten} Grades $\bar{S}_\varrho$ von $|\bar{A}|$ über. Ist $a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2$ ein linearer Theiler von S_ϱ, der in S_ϱ zur Potenz l_ϱ auftritt, so tritt der ihm entsprechende Theiler $a_1'\lambda + a_2'$, wo

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = (a_1 g + a_2 h)\lambda + (a_1 g' + a_2 h') = a_1'\lambda + a_2',$$

von $\overline{S}_\varrho$ in $\overline{S}_\varrho$ zur Potenz l_ϱ auf, falls nicht

$$a_1' = 0$$

wird, in welchem Falle dem Theiler $a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2$ von S_ϱ überhaupt *kein** linearer Theiler von $\overline{S}_\varrho$ entspricht. Entspräche nun einem weiteren Linearfaktor $b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2$ von S_ϱ, wo nicht

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2,$$

ebenfalls in $\overline{S}_\varrho$ der Theiler $a_1'\lambda + a_2'$, so wäre

$$b_1 g + b_2 h = C(a_1 g + a_2 h),$$
$$b_1 g' + b_2 h' = C(a_1 g' + a_2 h'),$$

wenn C eine von Null verschiedene, endliche Grösse bedeutet. Aus den letzten Gleichungen folgt aber, wenn man C eliminirt,

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)(gh' - g'h) = 0;$$

es wäre also

$$gh' - g'h = 0,$$

gegen die Voraussetzung. — Daher tritt der Theiler $a_1'\lambda + a_2'$, wenn $a_1' \neq 0$ ist, in $\overline{S}_\varrho$ *genau* zur Potenz l_ϱ auf.

Die Koefficienten a_1' und a_2' können nicht gleichzeitig Null sein, da sonst $gh' - g'h$ Null wäre. Die Systeme von $|A|$ und $|\overline{A}|$ sind daher *gleichen Ranges*.

Nun sei der Rang des Systems von $|A|$ gleich r. Der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten r^{ten} Grades von $|A|$ gleich $G(\lambda_1 | \lambda_2)$. Dann wählen wir in (1) die Konstanten g und h so, dass $G(g | h)$ nicht Null wird, und führen dann A mittelst (1) in $\overline{A}$ über. Ist nun $a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2$ irgend ein linearer Theiler von $G(\lambda_1 | \lambda_2)$, also die Basis eines ETs des Koefficientensystems von A (4), so ist a_1' nicht Null. Wäre nämlich $a_1' = a_1 g + a_2 h$ Null, so wäre $G(\lambda_1 | \lambda_2)$ für $\lambda_1 = g$, $\lambda_2 = h$ Null, gegen die Voraussetzung. Daher ist $a_1'\lambda + a_2'$ ein linearer Theiler aller Subdeterminanten r^{ten} Grades von $|\overline{A}|$. Tritt $a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2$ in allen Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades ($\varrho \leq r$) des Systems von $|A|$ zur Potenz l_ϱ auf, so gilt das Gleiche von dem entsprechenden Theiler $a_1'\lambda + a_2'$ aller Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades des Systems von $|\overline{A}|$, und umgekehrt. *Daher ist vermöge (1) jedem Elementartheiler* $(a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)^{e_\varrho}$ *des Koefficientensystems von* A *ein Elementartheiler* $(a_1'\lambda + a_2')^{e_\varrho}$ *des Koefficientensystems der Form* $\overline{A}$ *eindeutig zugeordnet,* wenn $G(g | h)$ von Null verschieden ist.

* Kein „eigentlicher", d. h. von λ wirklich abhängiger Theiler u. s. w. Dieser Zusatz „eigentlicher" bleibt als selbstverständlich oben weg.

38. Von dem eben entwickelten Principe der Zuordnung werden wir später noch ausgedehnte Anwendung machen. Zunächst benutzen wir dasselbe zum Beweise des folgenden Theorems:*

VII. Ist ein System, dessen Elemente binäre Formen gleichhohen Grades sind, zerlegbar, so sind die Elementartheiler desselben diejenigen seiner Theile zusammengenommen.

Es sei die Form A, deren Koefficienten homogene ganze Funktionen gleichen Grades von zwei Veränderlichen $\lambda_1 | \lambda_2$ seien, in die Theile A_1 und A_2 zerlegbar; $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ seien die Koefficientensysteme von A_1 bez. A_2. Die Rangzahlen von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ seien bez. r, r_1, r_2. Bedeutet dann G den grössten gemeinschaftlichen Theiler aller Subdeterminanten r^{ten} Grades von $\mathfrak{A}$, und haben G_1 und G_2 für die Systeme $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ die analoge Bedeutung, so ist nach 33 (vergl. die Schlussbemerkung)

$$(2) \qquad G = G_1 \cdot G_2.$$

Jetzt transformiren wir mittelst einer Substitution (1) die Form

$$A = A_1 + A_2$$

in eine Form

$$\overline{A} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2$$

und zwar wählen wir dabei die Konstanten g, h wieder so, dass G für $\lambda_1 = g$, $\lambda_2 = h$ nicht Null ist. Die Systeme von $\overline{A}$, $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ bezeichnen wir bez. mit $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{A}}_1$, $\overline{\mathfrak{A}}_2$. Da G für $\lambda_1 = g$, $\lambda_2 = h$ nicht Null ist, so gilt wegen (2) dasselbe von G_1 und G_2. Daher ist durch diese Gleichungen (1) jedem ET von $\mathfrak{A}$ ein ET von $\overline{\mathfrak{A}}$, aber auch jedem ET von $\mathfrak{A}_1$ oder $\mathfrak{A}_2$ ein ET von $\overline{\mathfrak{A}}_1$ bez. $\overline{\mathfrak{A}}_2$ zugeordnet (37). Nun sind aber die ET von $\overline{\mathfrak{A}}_1$ und $\overline{\mathfrak{A}}_2$ zusammengenommen gerade die ET von $\overline{\mathfrak{A}}$ (Theorem V, 34), also sind auch die ET von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zusammengenommen diejenigen von $\mathfrak{A}$, w. z. b. w.

39. Es seien nunmehr *speciell* die Koefficienten der bilinearen Form A binäre Formen *ersten Grades*; wir können dann

$$(3) \qquad A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$$

setzen, wo A_1 und A_2 Formen sind, die nicht von $\lambda_1 | \lambda_2$ abhängen. Alsdann stellt A eine Schaar von bilinearen Formen vor (1). Ist die Schaar A eine ordinäre, so enthält sie eine endliche Anzahl singulärer Formen (10); eine singuläre Schaar enthält lauter singuläre Formen. Das Formenpaar A_1, A_2 heisst ein ordinäres oder ein singuläres Formenpaar, je nachdem $|\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2| \not\equiv 0$ bez. $\equiv 0$ ist.

---

* Dasselbe ist in einem weit allgemeineren Theoreme enthalten. Vergl. § 18.

Es sei nun durch

(4) $$B = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$$

eine zweite Schaar gegeben. Dann heissen die beiden Schaaren A und B von bilinearen Formen **äquivalent**, wenn man A in B durch zwei von $\lambda_1 | \lambda_2$ unabhängige Substitutionen P und Q gemäss einer symbolischen Gleichung $B = PAQ$ transformiren kann, deren Determinanten $|P|$ und $|Q|$ nicht Null sind. B geht dann in A durch die zu P und Q inversen Substitutionen P^{-1}, Q^{-1} über, die ebenfalls von $\lambda_1 | \lambda_2$ unabhängig sind und nicht verschwindende Determinanten besitzen. Giebt es Substitutionen mit nicht verschwindender Determinante, welche eine Form A_1 in eine Form B_1 und zugleich eine Form A_2 in eine Form B_2 transformiren, so heissen die **Formenpaare** A_1, A_2 und B_1, B_2 **äquivalent**.

Sind die Schaaren A und B äquivalent, so giebt es Substitutionen, welche jede Form der einen in die entsprechende Form der anderen Schaar, die also insbesondere jede der Grundformen der einen Schaar in die entsprechende Grundform der anderen Schaar überführen (36). Umgekehrt folgt aus

$$B_1 = PA_1Q, \quad B_2 = PA_2Q,$$
$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = P(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)Q$$

oder

$$B = PAQ.$$

Giebt es Substitutionen P, Q, wo $|P|$, $|Q|$ nicht Null ist, die A_1 in B_1 und *gleichzeitig* A_2 in B_2 transformiren, so sind die Formenschaaren

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \quad \text{und} \quad \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$$

äquivalent. Sind die Formenschaaren A und B äquivalent, so sind es auch die Formenpaare A_1, A_2 und B_1, B_2, und umgekehrt.

Sind zwei Schaaren $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ und $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ äquivalent, so sind die Substitutionen, welche gleichzeitig A in A, B in B überführen, *rational* bestimmbar. Denn sind P, Q zwei Substitutionen der gesuchten Art, so hat man (symbolisch)

$$\mathsf{A} = PAQ, \quad \mathsf{B} = PBQ,$$

woraus für $Q^{-1} = R$

$$\mathsf{A}R = PA, \quad \mathsf{B}R = PB$$

folgt, sodass, wenn

$$\left.\begin{aligned} A &= \sum a_{ik} x_i y_k, \quad B = \sum b_{ik} x_i y_k, \\ \mathsf{A} &= \sum \alpha_{ik} x_i y_k, \quad \mathsf{B} = \sum \beta_{ik} x_i y_k \text{ u. s. w.} \end{aligned}\right\} (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

nach (5) in 10

$$(5) \qquad \sum_i \alpha_{il} r_{lk} = \sum_i p_{il} a_{lk}, \quad \sum_i \beta_{il} r_{lk} = \sum_i p_{il} b_{lk}$$
$$(l = 1, 2, \ldots n)$$

sein muss. Man hat sonach für die $2n^2$ unbekannten Koefficienten p_{ik} und q_{ik} gerade $2n^2$ homogene lineare Gleichungen (5). Die Determinante derselben muss verschwinden, und die willkürlichen Konstanten, die in die allgemeinste Lösung derselben eingehen, müssen so gewählt werden können, dass $|P| \neq 0$, $|R| \neq 0$ ist. Damit ist P gefunden, aber auch Q, da $Q = R^{-1}$ ist.*

Eine Formenschaar bildet zusammen mit allen zu ihr äquivalenten Schaaren eine Klasse von Formenschaaren (25). Man definirt ferner die Begriffe „elementare Schaar“, „reducirte Schaar“, u. s. w. hier genau so, wie es am eben citirten Orte bei Formen mit ganzzahligen Koefficienten geschah. Analog spricht man von einem „elementaren Formenpaare“, einem „reducirten Formenpaare“, u. s. w.

Aus dem Hauptsatze II in 8 oder auch direkt, wie in 24 und 25, ergiebt sich der Satz:

12) Sind zwei Formenschaaren A und B äquivalent, so stimmen ihre Koefficientensysteme im Range und in den Elementartheilern überein.

Auf Grund dieses Satzes bezeichnet man die ET des Koefficientensystems einer Formenschaar A auch als elementare Invarianten der Schaar A (des Formenpaares A_1 und A_2). Man wird nun sofort die Frage aufwerfen, ob sich dieser Satz 12 umkehren lässt. Das ist aber nicht allgemein der Fall, sondern nur dann, wenn die Determinanten $|A|$ und $|B|$ der Schaaren nicht identisch Null sind; im entgegengesetzten Falle müssen nicht blos Rangzahlen und ET der Systeme von $|A|$ und $|B|$ übereinstimmen, sondern es müssen noch weitere Bedingungen erfüllt sein, damit die Schaaren A und B äquivalent sind (§ 8). Wenden wir uns zunächst zum Falle, wo *die Determinanten der Schaaren A und B nicht identisch Null sind und die ET dieser Determinanten übereinstimmen.* Da $|A|$ nicht identisch Null ist, so können wir die Konstanten g, h in (1), so wählen, dass $|A|$ für $\lambda_1 = g$, $\lambda_2 = h$, also

$$|gA_1 + hA_2|$$

nicht Null ist, was zur Folge hat, dass auch

$$|gB_1 + hB_2|$$

nicht verschwindet. Alsdann wird vermöge (1)

* Vergl. Frobenius, Crelle's Journ. (79) Bd. 86, S. 146—147.

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = (g A_1 + h A_2)\lambda + g' A_1 + h' A_2 = \lambda \bar{A}_1 + \bar{A}_2,$$
$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = (g B_1 + h B_2)\lambda + g' B_1 + h' B_2 = \lambda \bar{B}_1 + \bar{B}_2,$$

wo die Formen

$$g A_1 + h A_2 = \bar{A}_1, \quad g' A_1 + h' A_2 = \bar{A}_2$$

u. s. w. gesetzt wurden. Die ET von $|A|$ und $|B|$ stimmen nach Voraussetzung überein, also auch diejenigen von

$$|\lambda \bar{A}_1 + \bar{A}_2| \quad \text{und} \quad |\lambda \bar{B}_1 + \bar{B}_2| \quad (37),$$

die Determinanten $|\bar{A}_1|$ und $|\bar{B}_1|$ sind nicht Null, also giebt es nach 36, Theorem VI Substitutionen, deren Koefficienten von λ nicht abhängen und deren Determinanten nicht Null sind, die $\lambda \bar{A}_1 + \bar{A}_2$ in $\lambda \bar{B}_1 + \bar{B}_2$ überführen. Durch diese Substitutionen geht also $\bar{A}_1$ in $\bar{B}_1$, $\bar{A}_2$ in $\bar{B}_2$, mithin die Schaar

$$\lambda_1' \bar{A}_1 + \lambda_2' \bar{A}_2$$

in die Schaar

$$\lambda_1' \bar{B}_1 + \lambda_2' \bar{B}_2$$

über. Insbesondere geht durch diese Substitutionen

$$h' \bar{A}_1 - h \bar{A}_2 = h'(g A_1 + h A_2) - h(g' A_1 + h' A_2) = (h'g - hg') A_1$$

in

$$h' \bar{B}_1 - h \bar{B}_2 = h'(g B_1 + h B_2) - h(g' B_1 + g' B_2) = (h'g - hg') A_2,$$

also A_1 in B_1 über; analog zeigt man, dass jene Substitutionen A_2 in B_2 überführen. Die Koefficienten dieser Substitutionen hängen nur von denen der Formen A_1, A_2, B_1, B_2 und den Konstanten g, g', h, h' ab; ihre Determinanten sind nicht Null; also sind die Schaaren

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \quad \text{und} \quad B = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$$

äquivalent, w. z. b. w.

Wir wollen das erlangte Resultat in dem Satze zusammenfassen:

VIII. Zwei Formenschaaren, deren Determinanten nicht identisch Null sind, sind dann und nur dann äquivalent, wenn die Determinanten der beiden Schaaren in ihren Elementartheilern übereinstimmen.

Dieses Theorem hat zuerst Weierstrass, nur in etwas anderer Form, aufgestellt in seiner für unsere ganze Theorie grundlegenden Arbeit: „Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen.“*

Bezeichnen wir den grössten gemeinschaftlichen Theiler aller Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades von $|A|$ (von $|B|$) mit $D_\varrho^{(a)} (D_\varrho^{(b)})$, so ist

---

* BM 1868, S. 312—314 (Ges. W. Bd. II, S. 21—22). Vergl. auch die S. 60—61 citirte Literatur.

nach dem Theoreme VIII die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Aequivalenz der Schaaren A und B, dass $D_\varrho^{(a)}$ mit $D_\varrho^{(b)}$ für $\varrho = 1, 2, \ldots n$ übereinstimmt. Nun können aber $D_\varrho^{(a)}$ und $D_\varrho^{(b)}$ auf rationalem Wege ermittelt werden (36, 39), *also kann über die Aequivalenz zweier Formenschaaren auf rationalem Wege entschieden werden,* und die Substitutionen, welche eine Schaar in eine äquivalente überführen, können durch alleinige Anwendung rationaler Operationen gefunden werden (siehe oben). Nirgends treten die (einfachen) ET, die im Allgemeinen irrational sein werden, wirklich explicite auf. Unser Beweis dafür, dass die Uebereinstimmung der ET von $|A|$ und $|B|$ die Aequivalenz von A und B zur Folge hat, basirt eben auf der Kronecker'schen Reduktion einer Form (28, 34), die rational ausgeführt wird, und die zu einer Form führt, in welcher nur die zusammengesetzten ET als Koefficienten auftreten. Dagegen benützt Weierstrass bei seinem Beweise eine reducirte Form einer Schaar, welche die Zerlegung der Determinante der Schaar in ihre einfachen ET nothwendig macht. Indem wir nunmehr auf diese ausserordentlich wichtige Weierstrass'sche Reduktion einer ordinären Schaar von bilinearen Formen näher eingehen, werden wir zugleich einen zweiten Beweis unseres Theorems VIII gewinnen.

§ 6. Reduktion einer ordinären Schaar von bilinearen Formen nach Weierstrass.*

a) Vorläufige Umformung der Schaar und die Jacobi'sche Transformation.

40. Es seien die bilinearen Formen

$$A = \sum a_{ik} x_i y_k, \quad B = \sum b_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

die Grundformen einer Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 B$, und zwar seien die Determinanten von A und B nicht beide Null, also sei etwa $|A|$ von Null verschieden. Wir verstehen unter λ eine willkürliche Veränderliche und setzen

$$\lambda A - B = C,$$

$$C = \sum c_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n);$$

es ist also

$$c_{ik} = \lambda a_{ik} - b_{ik}$$

und die Determinante

* Vergl. zu diesem Paragraphen die zuletzt citirte Arbeit von Weierstrass: BM 1868, S. 310—338 (Ges. W. Bd. II, S. 19—44).

$$|C| = |\lambda A - B| = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} - b_{11} \ldots\ldots \lambda a_{1n} - b_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda a_{n1} - b_{n1} \ldots\ldots \lambda a_{nn} - b_{nn} \end{vmatrix}$$

von C verschwindet nicht identisch, da $|A| \neq 0$ ist. Wir wollen diese Determinante kurz mit S bezeichnen. Die Wurzeln der Gleichung

$$S = 0,$$

die sämmtlich endlich sind, wollen wir mit

$$c_1, c_2, \ldots c_h$$

bezeichnen, wo $h \leq n$ ist. Sei $c_\varrho = c$ eine dieser Wurzeln und der Exponent der höchsten Potenz, zu welcher erhoben der lineare Theiler $\lambda - c$ von S in allen Subdeterminanten $(n - \varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung von S auftritt, gleich $l_\varkappa (\varkappa = 0, 1, \ldots n - 1, l_0 = l)$. Setzen wir dann

(1) $$l_{\varkappa - 1} - l_\varkappa = e_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n; \; l_n = 0),$$

so sind die Potenzen

$$(\lambda - c)^{e_1}, \quad (\lambda - c)^{e_2}, \ldots (\lambda - c)^{e_n}$$

von $\lambda - c$, deren Exponenten nicht Null sind, die sämmtlichen zur Basis $\lambda - c$ gehörigen ET von S (4); es ist

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_n = l.$$

Nunmehr bezeichnen wir die Adjunkte des Elementes c_{ik} im Systeme von S mit S_{ik}, ferner diejenige Determinante $(n - \varkappa)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren System aus demjenigen von S durch Weglassen der $\varkappa$ ersten Zeilen und Spalten hervorgeht, mit $S^{(\varkappa)}$,* endlich bedeute

$$(-1)^{ik} S_{ik}^{(\varkappa)}$$

die Determinante $(n - \varkappa - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren System aus dem von $S^{(\varkappa)}$ dadurch hervorgeht, dass man die $(i - \varkappa)^{\text{te}}$ Zeile und die $(k - \varkappa)^{\text{te}}$ Spalte weglässt. Dabei muss natürlich $i > \varkappa$, $k > \varkappa$ sein; ist i oder k kleiner oder gleich $\varkappa$, so denken wir uns $S_{ik}^{(\varkappa)} = 0$ gesetzt.

Zunächst erkennt man, dass

(2) $$S_{\varkappa\varkappa}^{(\varkappa - 1)} = S^{(\varkappa)}$$

ist. Ferner bestehen nach der Determinantentheorie die Gleichungen

(3) $$\begin{aligned} S_{11} S_{ik} - S_{i1} S_{1k} &= S \; S'_{ik}, \\ S'_{22} S'_{ik} - S'_{i2} S'_{2k} &= S' \; S''_{ik}, \\ S''_{33} S''_{ik} - S''_{i3} S''_{3k} &= S'' \; S'''_{ik}, \\ &\cdots\cdots \\ S_{nn}^{(n-1)} S_{ik}^{(n-1)} - S_{in}^{(n-1)} S_{nk}^{(n-1)} &= S^{(n-1)} S_{ik}^{(n)}, \end{aligned}$$

wo $S_{nn}^{(n-1)} = S^{(n)} = 1$ zu setzen ist.

---

* Es ist $S^0 = S$, $S^{(1)} = S'$, $S^{(2)} = S''$, ... zu setzen.

Wir dürfen die Annahme machen, dass in der Determinante S die mit $S', S'', \ldots S^{(n-1)}$ bezeichneten Subdeterminanten alle in Bezug auf den linearen Theiler $\lambda - c$ regulär (5) sind. Da nämlich $S \equiv\!\!\models 0$, also regulär ist, so enthält es nach Satz 1) in 5 mindestens eine reguläre Subdeterminante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, die wir durch Reihenvertauschung an die Stelle von S' bringen, falls dieses nicht schon regulär war;* nun enthält S' nach Satz 1) wieder mindestens eine reguläre Subdeterminante $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades, u. s. w. Man kann also durch blosse Reihenvertauschung [Elementartransformationen b) in 27] bewirken, oder anders ausgedrückt, *wir können in A und B und damit in C eine solche Anordnung der Variabelen x_i und y_i zu Grunde legen, dass die mit S', S'', ... bezeichneten Subdeterminanten von S alle in Bezug auf den betrachteten Linearfaktor $\lambda - c$ von S regulär sind.*

Dass bei dieser *vorläufigen Umformung* sämmtliche ET von S ungeändert bleiben, braucht wohl kaum bemerkt zu werden (27).

41. Da die Determinanten S, S', S'', ... alle regulär sind, wie wir voraussetzen dürfen, so ist keine derselben identisch Null, wir können daher aus (3) die Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{aligned}
\frac{S_{ik}}{S} &= \frac{S'_{ik}}{S'} + \frac{S_{i1}S_{1k}}{SS'},\\
\frac{S'_{ik}}{S'} &= \frac{S''_{ik}}{S''} + \frac{S'_{i2}S'_{2k}}{S'S''},\\
\frac{S''_{ik}}{S''} &= \frac{S'''_{ik}}{S'''} + \frac{S''_{i3}S''_{3k}}{S''S'''},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{S^{(n-1)}_{ik}}{S^{(n-1)}} &= \frac{S^{(n)}_{ik}}{S^{(n)}} + \frac{S^{(n-1)}_{in}S^{(n-1)}_{nk}}{S^{(n-1)}S^{(n)}}
\end{aligned}$$

folgern, wobei wegen (2)

$$S_{11} = S', \quad S'_{22} = S'', \ldots$$

gesetzt werden konnte. Durch Addition ergiebt sich aber aus (4)

$$(5)\qquad \frac{S_{ik}}{S} = \frac{S_{i1}S_{1k}}{SS'} + \frac{S'_{i2}S'_{2k}}{S'S''} + \frac{S''_{i3}S''_{3k}}{S''S'''} + \cdots + \frac{S^{(n-1)}_{in}S^{(n-1)}_{nk}}{S^{(n-1)}S^{(n)}}.$$

Ist $i \leq k\,(k \leq i)$, so besteht die rechte Seite dieser Gleichung aus einer Summe von $i\,(k)$ Gliedern, deren Bildungsgesetz man leicht erkennt. Jetzt multipliziren wir (5) rechts und links mit $u_k v_i$ und summiren über i, k. Dann erhalten wir

* Vergl. den Anfang von 7.

(6) $$\sum \frac{S_{ik}}{S} u_k v_i = \frac{X'Y'}{SS'} + \frac{X''Y''}{S'S''} + \frac{X'''Y'''}{S''S'''} + \cdots + \frac{X^{(n)}Y^{(n)}}{S^{(n-1)}S^{(n)}},$$
$$(i,\ k = 1,\ 2, \ldots n),$$

wenn wir

(7)
$$\begin{aligned} X' &= S_{11}u_1 + S_{12}u_2 + S_{13}u_3 + \cdots + S_{1n}u_n, \\ X'' &= \qquad\quad S'_{22}u_2 + S'_{23}u_3 + \cdots + S'_{2n}u_n, \\ X''' &= \qquad\qquad\qquad S''_{33}u_3 + \cdots + S''_{3n}u_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X^{(n)} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ S^{(n-1)}_{nn}u_n \end{aligned}$$

und

(8)
$$\begin{aligned} Y' &= S_{11}v_1 + S_{21}v_2 + S_{31}v_3 + \cdots + S_{n1}v_n, \\ Y'' &= \qquad\ + S'_{22}v_2 + S'_{32}v_3 + \cdots + S'_{n2}v_n, \\ Y''' &= \qquad\qquad\qquad S''_{33}v_3 + \cdots + S''_{n3}v_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y^{(n)} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ S^{(n-1)}_{nn}v_n \end{aligned}$$

setzen. Die durch (6) gegebene Umformung einer bilinearen Form

$$\sum S_{ik}u_k v_i \quad (i,\ k = 1,\ 2, \ldots n)$$

bezeichnet man als die Jacobi'sche Transformation der Form.* Die hier entwickelte Methode gab Weierstrass l. c. an.

b) Die Zerlegung von $\sum \frac{S_{ik}}{S} u_k v_i$ in Partialbrüche.

42. Auf der linken Seite der Gleichung (6) steht die zur Form

$$C = \sum c_{ik} x_i y_k$$

reciproke Form C^{-1} (12); C^{-1} ist eine rationale echt gebrochene Funktion der Veränderlichen λ und soll als solche in Partialbrüche zerlegt werden. Uns interessiren zunächst nur die Glieder der Zerlegung, in deren Nennern Potenzen des Linearfaktors $\lambda - c$ von S stehen. Anstatt nun dieselben direkt aus C^{-1} zu berechnen, benutzen wir die Gleichung (6) und zerlegen jedes Glied der rechts stehenden Summe in Bezug auf $\lambda - c$ in Partialbrüche und fassen dann die Glieder, in deren Nennern gleichhohe Potenzen von $\lambda - c$ stehen, zusammen. Um nun das Glied

* Vergl. Jacobi, Crelle's Journ. (57) Bd. 53, S. 265.

$$\frac{X^{(\varkappa)} Y^{(\varkappa)}}{S^{(\varkappa-1)} S^{(\varkappa)}},$$

wo $\varkappa$ eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$ bedeutet, und $X^{(1)} = X'$, $X^{(2)} = X''$, u. s. w. zu setzen ist, in Partialbrüche zu zerlegen, verfahren wir wie folgt:

Wir wissen, dass $S^{(\varkappa-1)} S^{(\varkappa)}$ den Faktor $\lambda - c$ *genau* zur Potenz

$$l_{\varkappa-1} + l_\varkappa$$

enthält, da die Determinanten $S^{(\varkappa-1)}$ und $S^{(\varkappa)}$ in Bezug auf $\lambda - c$ regulär sind (40). Also ist

$$\sqrt{S^{(\varkappa-1} S^{(\varkappa)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\lambda - c)^{l_\varkappa + l_{\varkappa-1}}}} = Q$$

eine Funktion von λ, die für $\lambda = c$ nicht Null wird; wir können daher in der Umgebung der Stelle $\lambda = c$ sowohl

$$\frac{X^{(\varkappa)}}{Q},$$

als auch

$$\frac{Y^{(\varkappa)}}{Q}$$

in eine unendliche Reihe nach steigenden Potenzen von $\lambda - c$ entwickeln.* Nun sind aber $X^{(\varkappa)}$ und $Y^{(\varkappa)}$ bei unbestimmten Werthen von

$$u_1, u_2, \ldots u_n \quad \text{und} \quad v_1, v_2, \ldots v_n$$

durch die $l_\varkappa^{\text{te}}$ Potenz von $\lambda - c$ und keine höhere theilbar, da $S^{(\varkappa)} = S^{(\varkappa-1)}_{\varkappa\varkappa}$ in (7) und (8) regulär ist. Die Entwickelungen von

$$\frac{X^{(\varkappa)}}{Q} \quad \text{und} \quad \frac{Y^{(\varkappa)}}{Q}$$

haben demnach folgende Gestalt:

---

* Zerlegt man Q^2 irgendwie in Faktoren p, q derart, dass sich p und q in der Umgebung der Stelle $\lambda = c$ nach steigenden Potenzen von $\lambda - c$ entwickeln lassen, so gilt das Gleiche von $\frac{X^{(\varkappa)}}{p}$ und $\frac{X^{(\varkappa)}}{q}$, sowie von

$$\frac{X^{(\varkappa)} Y^{(\varkappa)}}{pq} = \frac{X^{(\varkappa)} Y^{(\varkappa)}}{Q^2},$$

und man erhält schliesslich für $\frac{X^{(\varkappa)} Y^{(\varkappa)}}{S^{(\varkappa-1)} S^{(\varkappa)}}$ eine Entwickelung von der Gestalt (12). Wenn oben speciell

$$p = q = Q$$

gewählt wurde, so geschah dies mit Rücksicht auf die Ausführungen in § 10 dieses Buches.

$$(9)\quad \frac{X^{(\varkappa)}}{Q} = (\lambda - c)^{l_\varkappa}[X_{\varkappa 0} + (\lambda - c) X_{\varkappa 1} + (\lambda - c)^2 X_{\varkappa 2} + \cdots],$$

$$(10)\quad \frac{Y^{(\varkappa)}}{Q} = (\lambda - c)^{l_\varkappa}[Y_{\varkappa 0} + (\lambda - c) Y_{\varkappa 1} + (\lambda - c)^2 Y_{\varkappa 2} + \cdots],$$

wo die $X_{\varkappa\mu}$, $Y_{\varkappa\nu}$ von der Form

$$(11)\quad \begin{cases} X_{\varkappa\mu} = \frac{1}{\sqrt{C_\varkappa}}(C_{\varkappa\varkappa\mu} u_\varkappa + \cdots + C_{n\varkappa\mu} u_n) & \mu = 0, 1, \ldots, \\ Y_{\varkappa\nu} = \frac{1}{\sqrt{C_\varkappa}}(D_{\varkappa\varkappa\nu} v_\varkappa + \cdots + D_{n\varkappa\nu} v_n) & \nu = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

sind; $C_\varkappa$ und die Koefficienten von $u_\varkappa, \ldots u_n$ und $v_\varkappa, \ldots v_n$ in (11) sind ganze Funktionen von c und den Koefficienten der Formen A und B.

Aus (9) und (10) folgt aber durch Multiplikation, wenn wir für Q wieder seinen Werth einsetzen,

$$\frac{X^{(\varkappa)} Y^{(\varkappa)}}{S^{(\varkappa-1)} S^{(\varkappa)}} = \frac{(\lambda - c)^{2 l_\varkappa}}{(\lambda - c)^{l_\varkappa - 1 + l_\varkappa}} [X_{\varkappa 0} + (\lambda - c) X_{\varkappa 1} + \cdots] [Y_{\varkappa 0} + (\lambda - c) Y_{\varkappa 1} + \cdots]$$

oder mit Rücksicht auf (1)

$$(12)\quad \begin{cases} \frac{X^{(\varkappa)} Y^{(\varkappa)}}{S^{(\varkappa-1)} S^{(\varkappa)}} = \frac{1}{(\lambda - c)^{e_\varkappa}} [X_{\varkappa 0} + (\lambda - c) X_{\varkappa 1} + \cdots][Y_{\varkappa 0} + (\lambda - c) Y_{\varkappa 1} + \cdots] \\ \qquad = \frac{1}{(\lambda - c)^{e_\varkappa}} [Z_0 + Z_1(\lambda - c) + Z_2(\lambda - c)^2 + \cdots] \\ \qquad = \frac{Z_0}{(\lambda - c)^{e_\varkappa}} + \frac{Z_1}{(\lambda - c)^{e_\varkappa - 1}} + \cdots + \frac{Z_{e_\varkappa - 1}}{\lambda - c} + Z_{e_\varkappa} + \cdots; \end{cases}$$

die $\varkappa$ ersten rechtsstehenden Glieder sind der Beitrag, welchen

$$\frac{X^{(\varkappa)} Y^{(\varkappa)}}{S^{(\varkappa-1)} S^{(\varkappa)}}$$

bei der Partialbruchzerlegung in Bezug auf den Linearfaktor $\lambda - c$ liefert, wie sich aus den bekannten Regeln über die Partialbruchzerlegung unmittelbar ergiebt. Für uns kommen nur die Koefficienten von λ^{-1} und λ^{-2} in Betracht. Wir bezeichnen dieselben mit $F_\varkappa$ bez. $G_\varkappa$. Dann ist

$$F_\varkappa = Z_{e_\varkappa - 1}, \quad G_\varkappa = Z_{e_\varkappa - 2}$$

oder, wie sich durch Ausmultipliziren des Produktes in (12) ergiebt,

$$(13)\quad \begin{cases} F_\varkappa = X_{\varkappa 0} Y_{\varkappa, e_\varkappa - 1} + X_{\varkappa 1} Y_{\varkappa, e_\varkappa - 2} + \cdots + X_{\varkappa, e_\varkappa - 1} Y_{\varkappa 0}, \\ G_\varkappa = X_{\varkappa 0} Y_{\varkappa, e_\varkappa - 2} + X_{\varkappa 1} Y_{\varkappa, e_\varkappa - 3} + \cdots + X_{\varkappa, e_\varkappa - 2} Y_{\varkappa 0}. \end{cases}$$

Für $e_\varkappa = 1$ ist $G_\varkappa = 0$ zu setzen; ist $e_\varkappa = 0$, so sind natürlich $F_\varkappa$ und $G_\varkappa$ Null. Wir setzen jetzt mit Weierstrass

(14) $$\sum X_{\varkappa\mu} Y_{\varkappa\nu} = (X_\varkappa Y_\varkappa)_e \quad \begin{pmatrix} \mu + \nu = e - 1 \\ \mu, \nu = 0, 1, \dots e - 1 \end{pmatrix};$$

dann schreibt sich (13) kurz,

(15) $$\begin{cases} F_\varkappa = (X_\varkappa Y_\varkappa)_{e_\varkappa}, \\ G_\varkappa = (X_\varkappa Y_\varkappa)_{e_\varkappa - 1}; \end{cases}$$

nach Obigem ist

$$(X_\varkappa Y_\varkappa)_0 = 0$$

zu setzen. Bezeichnen wir jetzt die Koefficienten von $(\lambda - c)^{-1}$ und $(\lambda - c)^{-2}$ in der Partialbruchentwickelung von C^{-1} mit F bez. G, so ist wegen (6) und (15)

(16) $$\begin{cases} F = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum (X_\varkappa Y_\varkappa)_{e_\varkappa} \\ G = G_1 + G_2 + \dots + G_n = \sum (X_\varkappa Y_\varkappa)_{e_\varkappa - 1} \end{cases} \quad (\varkappa = 1, 2, \dots n).$$

Ist k eine der Zahlen $1, 2, \dots n$ und $e_k > 0$, aber $e_{k+1} = 0$, so ist

$$e_1 \geqq e_2 \geqq \dots \geqq e_k,$$
$$e_{k+1} = e_{k+2} = \dots = e_n = 0$$

nach 6, Gleich. (16). Daher ist

(17) $$\begin{matrix} F = \sum (X_\varkappa Y_\varkappa)_{e_\varkappa} \\ G = \sum (X_\varkappa Y_\varkappa)_{e_\varkappa - 1} \end{matrix} \quad (\varkappa = 1, 2, \dots k).$$

Wir fassen das erlangte Resultat nochmals zusammen: *Die Koefficienten von $(\lambda - c)^{-1}$ und $(\lambda - c)^{-2}$ in der Partialbruchzerlegung von C^{-1} in Bezug auf einen bestimmten Linearfaktor $\lambda - c$ von S sind durch F und G in (17) gegeben; dabei bedeuten*

$$e_1, e_2, \dots e_k$$

die Exponenten der sämmtlichen zur Basis $\lambda - c$ gehörigen ET von S. In F und G treten die linearen homogenen Funktionen

$$X_{10}, X_{11}, \dots X_{1, e_1 - 1}; \quad X_{20}, X_{21}, \dots X_{2, e_2 - 1}; \dots;$$
$$X_{k0}, X_{k1}, \dots X_{k, e_k - 1}$$

von $u_1, u_2, \dots u_n$ und

$$Y_{10}, Y_{11}, \dots Y_{1, e_1 - 1}; \quad Y_{20}, Y_{21}, \dots Y_{2, e_2 - 1}; \dots;$$
$$Y_{k0}, Y_{k1}, \dots Y_{k, e_k - 1}$$

von $v_1, v_2, \dots v_n$ auf. Die Anzahl der Ausdrücke $X_{\varkappa\mu}$ in F und $Y_{\varkappa\nu}$ in G ist bez. gleich (40)

(18) $$e_1 + e_2 + \dots + e_k = l.$$

43. Waren in der Determinante S die Subdeterminanten S', S''... ursprünglich nicht sämmtlich regulär in Bezug auf $\lambda - c$, wie es im Allgemeinen der Fall sein wird, so hatten wir uns C durch lineare Substitutionen einfachster Art, die mit Vertauschungen der Variabelen x_i bez. y_i gleichbedeutend waren, schon passend umgeformt gedacht, ehe wir die weiteren Entwickelungen in 41 und 42 vornahmen. Geht nun allgemein die bilineare Form C durch die linearen Substitutionen

$$(19) \qquad \begin{cases} x_i = \alpha_{1i} x_1' + \alpha_{2i} x_2' + \cdots + \alpha_{ni} x_n' \\ y_i = \beta_{i1} y_1' + \beta_{i2} y_2' + \cdots + \beta_{in} y_n' \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

deren Determinanten nicht verschwinden und deren Koefficienten nicht von λ abhängen, in die Form $\overline{C}$ über, bedeutet $\overline{S}$ die Determinante von $\overline{C}$, u. s. w., so ist für

$$(20) \qquad \begin{cases} u_i' = \alpha_{i1} u_1 + \alpha_{i2} u_2 + \cdots + \alpha_{in} u_n \\ v_i' = \beta_{1i} v_1 + \beta_{2i} v_2 + \cdots + \beta_{ni} v_n \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

bekanntlich:

$$(21) \qquad \sum \frac{S_{ik}}{S} u_k v_i = \sum \frac{\overline{S}_{ik}}{\overline{S}} u_k' v_i' \quad (i, k = 1, 2, \ldots n);$$

die Wurzeln von $S = 0$ und $\overline{S} = 0$ stimmen überein, desgleichen die Zahlen $l_\varkappa$ und $\overline{l}_\varkappa$, $e_\varkappa$ und $\overline{e}_\varkappa$ (Satz 9 in 26, 34). Wird nun insbesondere durch die Substitutionen (19) die Regularität der Determinanten $\overline{S}_1'$, $\overline{S}_1''$... in $\overline{S}$ in Bez. auf einen bestimmten linearen Theiler $\lambda - c$ von $\overline{S}$ erzielt, so können wir die Jacobi'sche Transformation anwenden und darauf die Partialbruchzerlegung in Bez. auf $\lambda - c$ vornehmen, wie es in 40—42 angegeben wurde. Indem wir dann wieder die u_i', v_i' durch die u_i bez. v_i ausdrücken, *erhalten wir wegen (21) die Partialbruchzerlegung von*

$$\sum \frac{S_{ik}}{S} u_k v_i \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

in Bezug auf den Theiler $\lambda - c$ von S. Es wird

$$(22) \qquad \sum \frac{S_{ik}}{S} u_k v_i = \cdots + \frac{G}{(\lambda - c)^2} + \frac{F}{(\lambda - c)} + H,$$

wo F und G durch (14) und (17) definirt sind und nach (11) die $X_{\varkappa\mu}$, $Y_{\varkappa\nu}$ Ausdrücke von der Form

$$(23) \qquad \begin{cases} X_{\varkappa\mu} = \frac{1}{\sqrt{C_\varkappa}} (C_{1\varkappa\mu} u_1 + C_{2\varkappa\mu} u_2 + \cdots + C_{n\varkappa\mu} u_n), \\ Y_{\varkappa\nu} = \frac{1}{\sqrt{C_\varkappa}} (D_{1\varkappa\nu} v_1 + D_{2\varkappa\nu} v_2 + \cdots + D_{n\varkappa\nu} v_n) \end{cases}$$

sind; $C_\varkappa$ und die Koefficienten der Veränderlichen u_i und v_i in (23) sind *ganze Funktionen* von c, der Koefficienten der Formen A und B

und der Substitutionskoefficienten α_{ik} und β_{ik}. Unter H ist die Gesammtheit der nicht auf den Theiler $\lambda - c$ bezüglichen Glieder der Partialbruchentwickelung zu verstehen.

Da wir die Regularität von S', S'', ... durch Elementartransformationen b) in 27 erzielen konnten, so sind die α_{ik} und β_{ik} hier nur Zahlen „Null" oder „Eins", und von den Koefficienten der u_i und v_i in (23) sind je $\varkappa - 1$ Stück nach (11) gleich Null; d. h. die Ausdrücke $X_{\varkappa\mu}$, $Y_{\varkappa\nu}$ haben zwar die in (11) angegebene Gestalt, aber die u_i bez. v_i werden im Allgemeinen unter sich vertauscht sein. Wir haben, anders ausgedrückt, in den gegebenen Formen A und B die Veränderlichen x_i, y_i in bestimmter Weise zu vertauschen, die Entwickelungen genau wie in 40—42 vorzunehmen und am Schlusse in den $X_{\varkappa\mu}$, $Y_{\varkappa\nu}$ eine der Vertauschung der Variabelen x_i und y_i entsprechende Vertauschung der u_i bez. v_i eintreten zu lassen. Wir haben vorstehend die Partialbruchzerlegung von C^{-1} *für eine bestimmte Wurzel* $c = c_\varrho$ von $S = 0$ durchgeführt. Um anzudeuten, dass sich diese Entwickelungen auf die Wurzel c_ϱ beziehen, denken wir uns in ihnen $c = c_\varrho$ und $l_\varkappa$, $e_\varkappa$, k, F, G u. s. w. mit einem oberen Index ϱ versehen, also $l_\varkappa^{(\varrho)}$, $e_\varkappa^{(\varrho)}$ u. s. w. geschrieben. Es ist wegen (18)

$$e_1^{(\varrho)} + e_2^{(\varrho)} + \cdots + e_{k^{(\varrho)}}^{(\varrho)} = l^{(\varrho)}$$

und (40)

$$l' + l'' + \cdots + l^{(h)} = n.$$

Im Allgemeinen wird jede Wurzel von $S = 0$ *eine besondere Anordnung* der Veränderlichen x_i und y_i, und damit auch der Veränderlichen u_i und v_i, erfordern (43, Schluss); daher werden auch die im Vorhergehenden mit S', S'', ... bezeichneten Determinanten im Allgemeinen für die verschiedenen Wurzeln verschieden sein. Unseren jetzt eingeführten Bezeichnungen gemäss haben wir nunmehr für C^{-1} eine Partialbruchzerlegung von der Gestalt

$$(24)\quad C^{-1} = \sum \frac{S_{ik} u_k v_i}{S} = \cdots + \frac{G'}{(\lambda - c_1)^2} + \frac{F'}{(\lambda - c_1)} + \cdots + \frac{G''}{(\lambda - c_2)^2} + \frac{F''}{(\lambda - c_2)} + \cdots + \frac{G^{(h)}}{(\lambda - c_h)^2} + \frac{F^{(h)}}{(\lambda - c_h)},$$

wo nach (16) und (17)

$$(25)\quad \begin{cases} F^{(\varrho)} = F_1^{(\varrho)} + F_2^{(\varrho)} + \cdots + F_{k^{(\varrho)}}^{(\varrho)} = \sum (X_\varkappa^{(\varrho)} Y_\varkappa^{(\varrho)})_{e_\varkappa^{(\varrho)}}, \\ G^{(\varrho)} = G_1^{(\varrho)} + G_2^{(\varrho)} + \cdots + G_{k^{(\varrho)}}^{(\varrho)} = \sum (X_\varkappa^{(\varrho)} Y_\varkappa^{(\varrho)})_{e_\varkappa^{(\varrho)}-1} \end{cases}$$

ist, und $\varkappa = 1, 2, \ldots k^{(\varrho)}$, $\varrho = 1, 2, \ldots h$ zu setzen ist.

c) Die Entwickelung von C^{-1} nach fallenden Potenzen von λ.

44. Aus Gleichung (24) ergiebt sich *eine Entwickelung von C^{-1} nach fallenden Potenzen von λ*; gerade diese Entwickelung ist für uns wichtig. Man hat nämlich

$$\frac{F^{(\varrho)}}{\lambda - c_\varrho} = \frac{F^{(\varrho)}}{\lambda} + c_\varrho \frac{F^{(\varrho)}}{\lambda^2} + \cdots,$$

$$\frac{G^{(\varrho)}}{(\lambda - c_\varrho)^2} = \frac{G^{(\varrho)}}{\lambda^2} + \cdots,$$

also

$$(26) \quad \sum \frac{S_{ik}}{S} u_k v_i = \frac{F' + F'' + \cdots + F^{(h)}}{\lambda} + \frac{(c_1 F' + G') + (c_2 F'' + G'') + \cdots + (c_h F^{(h)} + G^{(h)})}{\lambda^2} + \cdots$$

Setzt man in den Koefficienten von $\frac{1}{\lambda}$ und $\frac{1}{\lambda^2}$ für

$$F', F'', \ldots F^{(h)}, \ G', G'', \cdots G^{(h)}$$

ihre durch (25) gegebenen Werthe ein, so erkennt man, dass in ihnen

$$(27) \qquad l' + l'' + \cdots + l^{(h)} = n$$

lineare Formen $X^{(\varrho)}_{\varkappa\mu}$ von $u_1, u_2, \ldots u_n$ und ebensoviele lineare Formen $Y^{(\varrho)}_{\varkappa\nu}$ von $v_1, v_2, \ldots v_n$ auftreten (42, Schluss). Die *sämmtlichen ET von S* sind durch die Potenzen

$$(\lambda - c_1)^{e'_1}, (\lambda - c_1)^{e'_2}, \ldots (\lambda - c_1)^{e'_{k'}}; \ (\lambda - c_2)^{e''_1}, (\lambda - c_2)^{e''_2}, \ldots (\lambda - c_2)^{e''_{k''}}; \ \ldots; (\lambda - c_h)^{e_1^{(h)}}, (\lambda - c_h)^{e_2^{(h)}}, \ldots (\lambda - c_h)^{e^{(h)}_{k^{(h)}}}$$

gegeben; es sind

$$k' + k'' + \cdots + k^{(h)} = m$$

Stück; ferner ist die Summe der Exponenten dieser Potenzen gleich n (43).

Nun lässt sich aber die Bezeichnung bedeutend *vereinfachen.* Es seien, in irgend einer Reihenfolge geschrieben,

$$(\lambda - c_1)^{e_1}, (\lambda - c_2)^{e_2}, (\lambda - c_3)^{e_3}, \ldots (\lambda - c_m)^{e_m}$$

die eben aufgeführten sämmtlichen ET von S, wobei

$$(28) \qquad e_1 + e_2 + \cdots + e_m = n$$

ist; die c_ϱ brauchen natürlich nicht alle gleich zu sein, sie werden eben nur mit verschiedenen Buchstaben bezeichnet. Dann können wir für

$$F' + F'' + \cdots + F^{(h)} = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k'} (X'_\varkappa Y'_\varkappa)_{e'_\varkappa} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k''} (X''_\varkappa Y''_\varkappa)_{e''_\varkappa} + \cdots + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=k^{(h)}} (X^{(h)}_\varkappa Y^{(h)}_\varkappa)_{e^{(h)}_\varkappa}$$

kurz

$$\sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots m)$$

schreiben. Denn ist etwa

$$(\lambda - c_\varrho)^{e_\varkappa^{(\varrho)}} = (\lambda - c_\sigma)^{e_\sigma},$$

so wird

$$(X_\varkappa^{(\varrho)} Y_\varkappa^{(\varrho)})_{e_\varkappa^{(\varrho)}} = (X_\varkappa^{(\varrho)} Y_\varkappa^{(\varrho)})_{e_\sigma};$$

schreiben wir nun auf der rechten Seite der letzten Gleichung σ für $\varkappa$, so wird der obere Index ϱ überflüssig, da die vermöge der Bedeutung des Zeichens $(X_\sigma^{(\varrho)} Y_\sigma^{(\varrho)})_{e_\sigma}$ zu jedem einzelnen ET gehörigen $X_{\sigma\mu}$, $Y_{\sigma\nu}$ nunmehr durch den vorderen unteren Index σ gekennzeichnet sind. Wir können ferner jetzt analog

$$\begin{aligned} c_1 F' + c_2 F'' + \cdots + c_h F^{(h)} &= \sum c_\sigma (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} \\ G' + G'' + \cdots + G^{(h)} &= \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1} \end{aligned} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots m)$$

setzen, sodass schliesslich

(29) $$C^{-1} = \frac{\Sigma (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma}}{\lambda} + \frac{\Sigma c_\sigma (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} + \Sigma (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1}}{\lambda^2} + \cdots$$

. . . .

wird, wo $\sigma = 1, 2, \ldots m$ zu nehmen ist. Die linearen Formen $X_{\sigma\mu}$, $Y_{\sigma\nu}$ von

$$u_1, u_2, \ldots u_n \text{ bez. } v_1, v_2, \ldots v_n$$

sind jetzt

$$X_{10}, X_{11}, \ldots X_{1, e_1 - 1}; \quad X_{20}, X_{21}, \ldots X_{2, e_2 - 1}; \ldots;$$

$$X_{m0}, X_{m1}, \ldots X_{m, e_m - 1},$$

$$Y_{10}, Y_{11}, \ldots Y_{1, e_1 - 1}; \quad Y_{20}, Y_{21}, \ldots Y_{2, e_2 - 1}; \ldots;$$

$$Y_{m0}, Y_{m1}, \ldots Y_{m, e_m - 1}.$$

Es sind

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_m = n$$

Formen $X_{\sigma\mu}$ und ebensoviele Formen $Y_{\sigma\nu}$, wie wir schon oben sahen.

45. Von nun an verstehen wir unter den $X_{\sigma\mu}$ diejenigen linearen Formen der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche aus den bisherigen $X_{\sigma\mu}$ dadurch hervorgehen, dass in ihnen

(30) $$u_1 = \frac{\partial A}{\partial y_1}, \quad u_2 = \frac{\partial A}{\partial y_2}, \cdots u_n = \frac{\partial A}{\partial y_n}$$

gesetzt wird, unter $Y_{\sigma\nu}$ diejenigen linearen Formen der $y_1, y_2, \ldots y_n$, welche aus den seitherigen $Y_{\sigma\nu}$ dadurch hervorgehen, dass in ihnen

(31) $$v_1 = \frac{\partial A}{\partial x_1}, \quad v_2 = \frac{\partial A}{\partial x_2}, \cdots v_n = \frac{\partial A}{\partial x_n}$$

gesetzt wird; dann werden nach (23) die $X_{\sigma\mu}$, $Y_{\sigma\nu}$ von der Gestalt

$$(32)\quad \begin{cases} X_{\sigma\mu} = \frac{1}{\sqrt{C_\sigma}}(C'_{1\sigma\mu}x_1 + C'_{2\sigma\mu}x_2 + \cdots + C'_{n\sigma\mu}x_n), \\ Y_{\sigma\nu} = \frac{1}{\sqrt{C_\sigma}}(D'_{1\sigma\nu}y_1 + D'_{2\sigma\nu}y_2 + \cdots + D_{n\sigma\nu}y_n), \end{cases}$$

wo C_σ, $C'_{i\sigma\mu}$, $D'_{i\sigma\nu}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ ganze Funktionen von c_σ und von den Koefficienten a_{ik} und b_{ik} sind.

Geht die Form $\sum S_{ik}u_k v_i$ $(i, k = 1, 2, \ldots n)$ durch die Substitutionen (30) und (31) in eine bilineare Form der x_i, y_k, die mit $\Phi(xy)$ bezeichnet wird, über, so ist nach (29)

$$(33)\quad \frac{\Phi(xy)}{S} = \frac{\Sigma(X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma}}{\lambda} + \frac{\Sigma c_\sigma(X_\sigma Y_\sigma)e_\sigma + \Sigma(X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1}}{\lambda^2} + \cdots.$$

Nun werden wir sofort $\frac{\Phi(xy)}{S}$ aber noch *auf eine zweite Art nach fallenden Potenzen von λ entwickeln.* Führt man in

$$\sum S_{ik}u_k v_i = - \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} & v_1 \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} & v_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} & v_n \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_n & 0 \end{vmatrix}$$

die Substitutionen (30) und (31) aus und multiplizirt rechts und links mit $\lambda^\varkappa$, so kommt zunächst

$$\lambda^2\Phi(xy) = - \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} & \lambda\frac{\partial A}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} & \lambda\frac{\partial A}{\partial x_n} \\ \lambda\frac{\partial A}{\partial y_1} & \ldots & \lambda\frac{\partial A}{\partial y_n} & 0 \end{vmatrix}.$$

Nun multiplizire man die ersten n Zeilen vorstehender Determinante der Reihe nach mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ und subtrahire sie bez. von der letzten Zeile; in der so erhaltenen Determinante multiplizire man die n ersten Spalten der Reihe nach mit $y_1, y_2, \ldots y_n$ und subtrahire sie bez. von der letzten Spalte; dann wird, da

$$c_{ik} = \lambda a_{ik} - b_{ik}$$

ist,

$$\lambda^2\Phi(xy) = -\begin{vmatrix} \lambda a_{11} - b_{11} \ldots \lambda a_{1n} - b_{1n} & \lambda\frac{\partial A}{\partial x_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \lambda a_{n1} - b_{n1} \ldots \lambda a_{nn} - b_{nn} & \lambda\frac{\partial A}{\partial x_n} \\ \frac{\partial B}{\partial y_1} \cdots\cdots \frac{\partial B}{\partial y_n} & -\lambda A \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} \lambda a_{11} - b_{11} \ldots \lambda a_{1n} - b_{1n} & \frac{\partial B}{\partial x_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \lambda a_{n1} - b_{n1} \ldots \lambda a_{nn} - b_{nn} & \frac{\partial B}{\partial x_n} \\ \frac{\partial B}{\partial y_1} \cdots\cdots \frac{\partial B}{\partial y_n} & -\lambda A - B \end{vmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\lambda^2 \frac{\Phi(xy)}{S} = \lambda A + B + \frac{D}{\lambda} + \frac{D'}{\lambda^2} + \cdots,$$

wo es auf die nähere Bestimmung der Koefficienten D, D', ... nicht ankommt, und weiterhin

(34) $$\frac{\Phi(xy)}{S} = \frac{A}{\lambda} + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{D}{\lambda^3} + \frac{D'}{\lambda^4} + \cdots,$$

und *somit haben wir in der That eine zweite Entwickelung von* $\frac{\Phi(xy)}{S}$ *nach fallenden Potenzen von* λ *gewonnen.*

d) Die Weierstrass'sche reducirte Formenschaar.

46. Nunmehr gelangen wir rasch ans Ziel. Vergleicht man nämlich die beiden Entwickelungen (33) und (34) von $\frac{\Phi(xy)}{S}$, so ergiebt sich sofort

(35) $$\left\{\begin{array}{l} A = \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} \\ B = \sum c_\sigma (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} + \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1} \end{array}\right\} (\sigma = 1, 2, \ldots m);$$

die n *linearen Formen* $X_{\sigma\mu}$ *der* $x_1, x_2, \ldots x_n$, *ebenso die* n *linearen Formen* $Y_{\sigma\mu}$ *der* $y_1, y_2, \ldots y_n$, *welche in* A *und* B *auftreten* (44), *sind unabhängig von einander.* Betrachtet man nämlich A als bilineare Form der $2n$ Veränderlichen $X_{\sigma\mu}$, $Y_{\sigma\nu}$, so werde dieselbe mit A bezeichnet. Dann ist für $\mu + \nu = e_\sigma - 1$

$$\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial X_{\sigma\mu}} = Y_{\sigma\nu}, \quad \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial Y_{\sigma\nu}} = X_{\sigma\mu}, \quad \frac{\partial^2 \mathsf{A}}{\partial X_{\sigma\mu}\partial Y_{\sigma\nu}} = 1,$$

also ist

$$|\mathsf{A}| = 1.$$

Nun geht aber A in A durch die linearen Substitutionen (32) über; daher ist nach 11, 2)

$$|A| = \text{det. der } X_{\sigma\mu}\cdot 1\cdot \text{det. der } Y_{\sigma\nu};$$

da aber nach Voraussetzung $|A| \neq 0$ ist (40), so kann nach der letzten Gleichung weder die Determinante der n linearen Formen $X_{\sigma\mu}$ der $x_1, x_2, \ldots x_n$ noch diejenige der n linearen Formen $Y_{\sigma\nu}$ der $y_1, y_2, \ldots y_n$ Null sein, w. z. b. w. — Man kann also auch umgekehrt die $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch die $X_{\sigma\mu}$, die $y_1, y_2, \ldots y_n$ durch die $Y_{\sigma\nu}$ ausdrücken, d. h. aus (32) folgen Gleichungen von der Form

$$(36)\qquad \begin{cases} x_i = \sum C''_{i\sigma\mu} X_{\sigma\mu} \\ y_i = \sum D''_{i\sigma\nu} Y_{\sigma\nu} \end{cases} \begin{pmatrix} \sigma = 1,\ 2, \ldots m \\ \mu = 0,\ 1, \ldots e_\sigma - 1 \\ \nu = 0,\ 1, \ldots e_\sigma - 1 \end{pmatrix}.$$

Das erlangte Resultat können wir folgendermassen aussprechen: *Sind A und B zwei bilineare Formen von je $2n$ Variabelen, von denen die erste eine nicht verschwindende Determinante besitzt, sind ferner*

$$(\lambda - c_1)^{e_1},\ (\lambda - c_2)^{e_2}, \ldots (\lambda - c_m)^{e_m} \quad (m \leqq n)$$

die sämmtlichen Elementartheiler der Determinante

$$|\lambda A - B|,$$

so können durch lineare Substitutionen (36), deren Determinanten nicht Null sind, die Formen A und B gleichzeitig bez. in die bilinearen Formen

$$(37)\qquad \left.\begin{aligned} \mathsf{A} &= \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma}, \\ \mathsf{B} &= \sum c_\sigma (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} + \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1} \end{aligned}\right\} (\sigma = 1, 2, \ldots m)$$

von je $2n$ Veränderlichen $X_{\sigma\mu}$, $Y_{\sigma\nu}$ transformirt werden, wo

$$(X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} = \sum X_{\sigma\mu} Y_{\sigma\nu} \begin{pmatrix} \mu, \nu = 0, 1, \ldots e_\sigma - 1 \\ \mu + \nu = e_\sigma - 1 \end{pmatrix}$$

definirt ist, und

$$(X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1} = 0$$

zu nehmen ist, wenn $e_\sigma = 1$ ist.

47. Wir lassen jetzt die Voraussetzung, dass die Determinanten beider Grundformen der zu reducirenden Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ von Null verschieden sind, fallen und *nehmen blos an, dass die Determinante der Schaar nicht identisch Null ist.* Die sämmtlichen ET der Determinante

$$|\lambda_1 A + \lambda_2 B|$$

der Schaar seien, in irgend einer Reihenfolge geschrieben,

$$(a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2)^{e_1}, \quad (a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2)^{e_2}, \ldots (a_m\lambda_1 + b_m\lambda_2)^{e_m},$$

wo $m \leqq n$ ist.

Wir führen nun mittelst einer Substitution

(38) $$\lambda_1 = g\lambda - g', \quad \lambda_2 = h\lambda - h',$$

wo

$$gh' - g'h$$

nicht Null sein soll, statt der Veränderlichen $\lambda_1 | \lambda_2$ einen Parameter λ ein (vergl. 37). Dann wird

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B = (gA + hB)\lambda - (g'A + h'B) = \lambda\overline{A} - \overline{B},$$

wo

(39) $$\begin{cases} \overline{A} = g\,A + h\,B, \\ \overline{B} = g'A + h'B. \end{cases}$$

Wählen wir dabei $g | h$ so, dass

$$|gA + hB| \neq 0$$

ist, so ist durch (38) jedem ET $(a_\sigma\lambda_1 + b_\sigma\lambda_2)^{e_\sigma}$ von $|\lambda_1 A + \lambda_2 B|$ ein ET

$$[(a_\sigma g + b_\sigma h)\lambda - (a_\sigma g' + b_\sigma h')]^{e_\sigma}$$

von $|\lambda\overline{A} - \overline{B}|$ zugeordnet (37). Die Konstanten g, g', h, h' können und wollen wir so wählen, dass

(40) $$gh' - g'h = 1$$

ist. Da es ferner nur auf das Verhältniss der Koefficienten $a_\sigma | b_\sigma$ ankommt, so können wir $a_\sigma | b_\sigma$ so bestimmen, dass

(41) $$a_\sigma g + b_\sigma h = 1$$

ist. Denn wir haben $a_\sigma g + b_\sigma h \neq 0$ vorausgesetzt; es sei also

$$a_\sigma g + b_\sigma h = p,$$

wo $p \neq 0$ ist. Dann wird

$$\frac{a_\sigma}{p} g + \frac{b_\sigma}{p} h = 1,$$

und wir brauchen daher nur $\frac{a_\sigma}{p}$ für a_σ und $\frac{b_\sigma}{p}$ für b_σ zu nehmen, um das Gewünschte zu erreichen. — Dadurch wird einfach

$$a_\sigma\lambda_1 + b_\sigma\lambda_2 = \lambda - (a_\sigma g' + b_\sigma h') = \lambda - c_\sigma,$$

wenn

(42) $$a_\sigma g' + b_\sigma h' = c_\sigma$$

gesetzt wird. Die sämmtlichen ET von $|\lambda\overline{A} - \overline{B}|$ sind alsdann (37)

$$(\lambda - c_1)^{e_1}, \quad (\lambda - c_2)^{e_2}, \ldots (\lambda - c_m)^{e_m};$$

$|\overline{A}|$ ist nicht Null, also können wir nach 46 $\overline{A}$ und $\overline{B}$ in

$$(43)\qquad \begin{cases} \bar{A} = \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} \\ \bar{B} = \sum c_\sigma (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} + \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1} \end{cases} (\sigma = 1, 2, \ldots m)$$

umformen (vergl. Formel (35) oben), wo die $X_{\sigma\mu}$ $(Y_{\sigma\nu})$ n unabhängige lineare Formen der x_i (y_i) sind von der Gestalt (32); in letzteren Formeln sind C_σ, $C_{i\sigma\mu}$, $D'_{i\sigma\nu}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ ganze Funktionen von c_σ und von den Koefficienten von $\bar{A}$ und $\bar{B}$, mithin auch wegen (42) und (39) ganze Funktionen von $a_\sigma | b_\sigma$ und den Koefficienten von A und B.

Aus (39) folgt aber mit Rücksicht auf (40) und (42)

$$A = \quad h'\bar{A} - h\bar{B} = \sum (h' - hc_\sigma)\ (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} - h \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1},$$

$$B = -g'\bar{A} + g\bar{B} = \sum (gc_\sigma - g')\ (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} + g \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1},$$

aus (40), (41) und (42) ferner

$$a_\sigma = h' - c_\sigma h,\ b_\sigma = c_\sigma g - g',$$

sodass schliesslich

$$(44)\qquad \begin{cases} A = \sum a_\sigma (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} - h \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1}, \\ B = \sum b_\sigma (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} + g \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1} \end{cases}$$

wird. Daher haben wir folgendes Resultat erzielt:

Ist die Determinante einer Formenschaar

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B,$$

deren Grundformen von je $2n$ Variabelen x_i und y_i abhängen, nicht identisch Null, sind, in irgend einer Reihenfolge geschrieben,

$$(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma}\ (\sigma = 1, 2 \ldots m)$$

ihre sämmtlichen ET, so giebt es lineare Substitutionen mit nicht verschwindenden Determinanten und von $\lambda_1 | \lambda_2$ unabhängigen Koefficienten, welche A und B gleichzeitig in

$$(45)\qquad \begin{cases} \mathsf{A} = \sum a_\sigma (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} - h \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1}, \\ \mathsf{B} = \sum b_\sigma (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} + g \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1} \end{cases} (\sigma = 1, 2, \ldots m)$$

transformiren, wo die Konstanten $g | h$ willkürlich, aber so gewählt sind, dass

$$|gA + hB|$$

nicht Null ist, und die $a_\sigma | b_\sigma$ der Gleichung

$$a_\sigma g + b_\sigma h = 1$$

entsprechend gewählt sind.

Die Schaar $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ ist zerlegbar; ihre einzelnen Theile

$$\lambda_1 [a_\sigma (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} - h(X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1}] + \lambda_2 [b_\sigma (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} + g(X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1}]$$

sind, wie wir sehen werden (48), irreducibel; daher ist die Schaar $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ eine in lauter elementare Schaaren zerlegbare oder eine *reducirte Formenschaar*, wir haben die gegebene Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ in eine äquivalente reducirte Schaar $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ übergeführt oder, kürzer gesagt, die *Reduktion einer Formenschaar* wirklich ausgeführt (39), allerdings *unter der Voraussetzung, dass die Schaar nicht singulär ist.*

Ist von den Determinanten $|A|$ und $|B|$ eine, etwa $|A|$ nicht Null, so können wir vorstehend

$$g = 1, \quad h = 0, \quad g' = 0, \quad h' = 1, \quad a_\sigma = 1, \quad b_\sigma = c_\sigma, \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = -1$$

setzen, wodurch unser allgemeineres Resultat wieder in das speciellere in (46) übergeht.

Stimmen für zwei nicht singuläre Schaaren die ET ihrer Determinanten überein, so können wir jede derselben in *eine und dieselbe* äquivalente reducirte Formenschaar überführen. Daher sind dann die beiden Schaaren unter sich äquivalent. Auf diese Weise hat Weierstrass sein berühmtes Theorem VIII (in 39) über die Aequivalenz nicht singulärer Schaaren zuerst bewiesen.

§ 7. Formenschaaren, deren Determinanten vorgeschriebene Elementartheiler besitzen.

48. Wir wollen nun ein Theorem beweisen, welches für die Theorie der gleichzeitigen linearen Transformation zweier bilinearen Formen auf eine einfache (kanonische, Normal-) Form von fundamentaler Bedeutung ist. Im letzten Paragraphen haben wir eine derartige Transformation der bilinearen Formen A und B von je $2n$ Veränderlichen x_i, y_i in die bilinearen Formen A, B von je $2n$ Veränderlichen $X_{\sigma\mu}$, $Y_{\sigma\nu}$ ausgeführt [vergl. die Gleich. (45)]. Diese letzteren Formen A und B sind vollständig bestimmt, sobald man die ET von $|\lambda_1 A + \lambda_2 B|$ kennt und $g|h$ passend gewählt hat. Nun entsteht die umgekehrte Frage, ob die bilinearen Formen A und B, wenn man in ihnen, bei gegebenem n, die Zahlen $e_1, e_2, \ldots e_m$, die Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_m$, $b_1, b_2, \ldots b_m$ und $g|h$ den Bedingungen

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_m = n,$$
$$g a_\sigma + h b_\sigma = 1 \quad (\sigma = 1, 2, \ldots m)$$

gemäss, im Uebrigen aber ganz willkürlich wählt, so beschaffen sind, dass die Determinante

$$|\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}|$$

gerade die ET

$$(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots m)$$

besitzt, oder ob es, kurz gesagt, Formenschaaren giebt, deren Determinanten vorgeschriebene ET besitzen. Dies ist in der That der Fall und sehr einfach nachzuweisen. Wir beweisen also das folgende Theorem von Weierstrass*:

IX. Wählt man in

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \mathsf{A} &= \sum a_\sigma (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} - h \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1} \\ \mathsf{B} &= \sum b_\sigma (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} + g \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1} \end{aligned} \right\} (\sigma = 1, 2, \ldots m)$$

die positiven ganzen Zahlen $e_1, e_2, \ldots e_m$ und die Konstanten a_σ, b_σ, g, h willkürlich, aber so, dass bei gegebenem

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_m = n$$

und

$$g a_\sigma + h b_\sigma$$

nicht Null ist, setzt in (1) ferner $(X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1} = 0$ für $e_\sigma = 1$, so besitzt die Determinante $|\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}|$ der von $2n$ Variabelen $X_{\sigma\mu}$, $Y_{\sigma\nu}$ abhängigen Schaar $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ die Elementartheiler

$$(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots m).$$

Beweis. Setzen wir

$$\mathsf{A}_\sigma = a_\sigma (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} - h \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1},$$
$$\mathsf{B}_\sigma = b_\sigma (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} + g \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1},$$

so ist die Schaar $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ in die m Theilschaaren

$$\lambda_1 \mathsf{A}_\sigma + \lambda_2 \mathsf{B}_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, \ldots m)$$

zerlegbar. Nun sei σ eine der Zahlen $1, 2, \ldots m$; wir wollen die ET der Determinante der Form $\lambda_1 \mathsf{A}_\sigma + \lambda_2 \mathsf{B}_\sigma$ von $2e_\sigma$ Variabelen

$$X_{\sigma 0}, \; X_{\sigma 1}, \ldots X_{\sigma, e_\sigma - 1}, \quad Y_{\sigma 0}, \; Y_{\sigma 1}, \ldots Y_{\sigma, e_\sigma - 1},$$

die Veränderlichen in dieser Reihenfolge genommen, bestimmen. Setzt man noch abkürzend

$$a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2 = u, \quad g \lambda_2 - h \lambda_1 = v,$$

so wird

$$|\lambda_1 \mathsf{A}_\sigma + \lambda_2 \mathsf{B}_\sigma| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & v & u \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & v & u & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v & u & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \pm u^{e_\sigma}.$$

---

* B M 1868, S. 327 flg. (Ges. W. Bd. II, S. 33 flg.)

Diejenige Determinante, deren System aus dem der vorstehenden durch Weglassen der letzten Zeile und Spalte entsteht, ist gleich

$$\mp v^{e_\sigma - 1}$$

und daher nicht durch u theilbar; sonst wäre ja, wenn C eine Konstante bedeutet, die weder Null noch unendlich ist,

$$a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2 = C(g\lambda_2 - h\lambda_1),$$

also

$$a_\sigma = -Ch, \quad b_\sigma = Cg,$$

$$g a_\sigma + h b_\sigma = 0,$$

gegen die Voraussetzung. *Also besitzt die Determinante*

$$|\lambda_1 \mathsf{A}_\sigma + \lambda_2 \mathsf{B}_\sigma|$$

nur den einzigen ET

$$u^{e_\sigma} = (a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma}.$$

(Vergl. 2.) Die ET von $|\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}|$ sind aber nach dem Theoreme VII in 38 die ET von

$$\lambda_1 \mathsf{A}_1 + \lambda_2 \mathsf{B}_1, \quad \lambda_1 \mathsf{A}_2 + \lambda_2 \mathsf{B}_2, \ldots \lambda_1 \mathsf{A}_m + \lambda_2 \mathsf{B}_m$$

zusammengenommen; also besitzt $|\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}|$ die ET

$$(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots m),$$

w. z. b. w.

Die Formenschaar $\lambda_1 \mathsf{A}_\sigma + \lambda_2 \mathsf{B}_\sigma$ ist nicht zerlegbar, sie ist aber auch keiner zerlegbaren äquivalent. Denn angenommen, sie wäre einer zerlegbaren Schaar Γ mit den Theilschaaren Γ_1 und Γ_2 äquivalent, dann wäre (22, Satz c)

$$|\Gamma| = |\Gamma_1| \cdot |\Gamma_2|,$$

und somit, da $|\Gamma| \not\equiv 0$ ist, auch $|\Gamma_1| \not\equiv 0$, $|\Gamma_2| \not\equiv 0$; $|\Gamma|$, und daher auch $|\lambda_1 \mathsf{A}_\sigma + \lambda_2 \mathsf{B}_\sigma|$, besässe dann mindestens zwei ET, entgegen dem oben Bewiesenen. Also ist $\lambda_1 \mathsf{A}_\sigma + \lambda_2 \mathsf{B}_\sigma$ eine irreducibele oder elementare Schaar, und $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B} = \sum \lambda_1 \mathsf{A}_\sigma + \lambda_2 \mathsf{B}_\sigma$ $(\sigma = 1, 2, \ldots m)$ *eine reducirte Schaar,* wie in 47 behauptet wurde (39). Analog ergiebt sich allgemein mit Rücksicht auf S. 82—83: *Eine ordinäre Schaar ist dann und nur dann irreducibel, wenn ihre Determinante einen einzigen ET besitzt.*

49. Auf das Theorem IX gründet sich eine Klassification der Formenschaaren (Formenpaare), die von gleichvielen Variabelenpaaren abhängen, unter Zugrundelegung unbeschränkter linearer Transformationen der Variabelen beider Reihen, wie folgt:

Besitzt die Determinante einer von n Variabelenpaaren abhängigen Formenschaar $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ die ET

$$(a_1\lambda_1+b_1\lambda_2)^{e_1'},\quad (a_1\lambda_1+b_1\lambda_2)^{e_2'},\ldots(a_1\lambda_1+b_1\lambda_2)^{e'_{k'}};$$
$$(a_2\lambda_1+b_2\lambda_2)^{e_1''},\quad (a_2\lambda_1+b_2\lambda_2)^{e_2''},\ldots(a_2\lambda_1+b_2\lambda_2)^{e''_{k''}};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_h\lambda_1+b_h\lambda_2)^{e_1^{(h)}},\quad (a_h\lambda_1+b_h\lambda_2)^{e_2^{(h)}},\ldots(a_h\lambda_1+b_h\lambda_2)^{e^{(h)}_{k^{(h)}}},$$

so sagen wir, die Formenschaar $\lambda_1 A+\lambda_2 B$ (das Formenpaar A, B) habe die Charakteristik

(2) $$[(e_1', e_2', \ldots e'_{k'}),\ (e_1'', e_2'', \ldots e''_{k''}), \ldots (e_1^{(h)}, e_2^{(h)}, \ldots e^{(h)}_{k^{(h)}})].$$

Da die Summe dieser Exponenten

(3) $$e_1'+e_2'+\cdots+e'_{k'}+e_1''+e_2''+\cdots+e''_{k''}+e_1^{(h)}+e_2^{(h)}+\cdots+e^{(h)}_{k^{(h)}}=n$$

ist, so gehört zu allen von je $2n$ Variabelen abhängigen Formenschaaren eine *endliche* Anzahl solcher Charakteristiken (2), weil es für ein gegebenes n nur eine endliche Anzahl Lösungen der Gleichung (31) in positiven, ganzen (von Null verschiedenen) Zahlen $e^{(\varrho)}_{k^{(\varrho)}}$ giebt. Ziehen wir nun *alle überhaupt möglichen Lösungen* der Gleichung (3) in positiven, ganzen Zahlen $e^{(\varrho)}_{k^{(\varrho)}}$ bei gegebenem n in Betracht und bilden aus jeder Lösung einen solchen Klammerausdruck (2), so gehört nach dem Theoreme IX — und darin besteht die grosse Bedeutung dieses Theorems — zu jedem der so erhaltenen Klammerausdrücke (2) eine Formenschaar $\lambda_1 A+\lambda_2 B$, welche denselben als Charakteristik besitzt. Hiernach können wir die von je $2n$ Variabelen $x_1, \ldots x_n$, $y_1, \ldots y_n$ abhängigen Formenschaaren (Formenpaare) bei unbeschränkter linearer Transformation der Variabelen folgendermassen klassificiren: *Wir rechnen zu derselben* Klasse von Formenschaaren* (Formenpaare) *diejenigen Formenschaaren (Formenpaare), welche eine und dieselbe Charakteristik besitzen.*

Die gemeinsame Charakteristik aller Formenschaaren einer Klasse heisst die Charakteristik der Klasse. Wir können übrigens eine solche Charakteristik (2) bei passender Bezeichnung der auftretenden Exponenten einfacher in der Form

$$[(e_1 e_2 \ldots e_k),\ (e_{k+1}\ldots e_l), \ldots (e_r\ e_{r+1}\ldots e_m)]$$

schreiben, wo $e_1, e_2, e_3, \ldots e_m$ die Exponenten der sämmtlichen m ET von $|\lambda_1 A+\lambda_2 B|$ bedeuten, da durch die runden Klammern genügend

---

* Das Wort „Klasse von Formenschaaren" wird hier in einem anderen Sinne gebraucht, als in 39. Man hat, um Zweideutigkeit zu vermeiden, in analogen Fällen auch wohl von „Typen" statt von „Klassen" gesprochen (vergl. z. B. Rosenow, die Normalform für die 472 verschiedenen Typen eigt. bil. Form. von 10 Variabelenpaaren bei congr. Transf. der Var., Wiss. Beilage zum Programm der vierten Städtisch. höh. Bürgersch. zu Berlin, 1892, S. 6), doch scheint es praktischer, das Wort „Klasse" auch hier zu verwenden. Es genügt, die Verschiedenheit der Bedeutung desselben Wortes hervorgehoben zu haben.

angedeutet wird, dass die von ihnen umschlossenen Exponenten sich auf *dieselbe* Basis beziehen; er ist dann

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_m = n.$$

Aequivalente Formenpaare gehören zur selben Klasse; aber umgekehrt sind zwei Formenpaare derselben Klasse nicht nothwendig auch äquivalent; hierzu ist ja erforderlich, dass nicht nur die Exponenten der ET, sondern die ET selbst für die Determinanten der durch die beiden Formenpaare bestimmten zwei Schaaren übereinstimmen (Theorem VIII).

Das Theorem VIII garantirt aber nicht nur für die Existenz von Formenpaaren aller Klassen, sondern es liefert auch in den Gleichungen (1) für jede Klasse ein ihr angehöriges Formenpaar A, B von höchst einfacher Form. Da in (1) die Konstanten a_σ, b_σ, $g \mid h$ nur der Bedingung

$$a_\sigma g + b_\sigma h \neq 0 \quad (\sigma = 1, 2, \ldots m)$$

zu genügen haben, im Uebrigen aber ganz willkürlich sind, so kann man nach dem Theoreme VII alle Formenpaare einer Klasse durch lineare Substitutionen auf die Gestalt dieses ihr zugehörigen Formenpaares A, B transformiren. Man bezeichnet daher A und B auch als Normalform oder kanonische Form der Formenpaare der betreffenden Klasse. (Analog spricht man von einer zu einer bestimmten Klasse von Schaaren bilinearer Formen gehörigen Normalform $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$.) *Durch die* Weierstrass'*schen Untersuchungen, die in den Theoremen VIII und IX gipfeln, ist nach dem eben Ausgeführten das Problem der gleichzeitigen Transformation zweier bilinearen Formen von je* 2*n Variabelen auf eine gewisse einfache oder kanonische (Normal-) Form gelöst und die Aufgabe, dabei sämmtliche möglichen Fälle für ein gegebenes n aufzuzählen, in vollständigster und systematischster Weise erledigt.* Hierauf namentlich beruhen die zahlreichen Anwendungen, welche die sog. Weierstrass'sche Theorie der ET in fast allen Zweigen der höheren Mathematik gefunden hat.*

50. Im Vorstehenden ist stets zu beachten, dass Alles nur für ordinäre Formenpaare gilt. Ehe wir uns zu den analogen Untersuchungen über singuläre Paare (Schaaren) wenden, *wollen wir für die Fälle $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$ die Klassenzahl der Schaaren von bilinearen Formen (der Paare von bilinearen Formen) bestimmen und die zu den einzelnen Klassen gehörenden Normalformen wirklich aufstellen.*

* Vergl. § 16 u. § 17 am Schlusse.

Im Falle $n = 1$ haben wir für die Gleichung

$$(4) \qquad e_1 + e_2 + \cdots + e_m = 1$$

nur eine Lösung $e_1 = 1$. Es giebt also nur *eine* Klasse von Formenpaaren mit der Charakteristik [1]. Hier wird (1) zu

$$\mathsf{A} = a_1(X_1 Y_1)_1 = a_1 X_{10} Y_{10},$$
$$\mathsf{B} = b_1(X_1 Y_1)_1 = b_1 X_{10} Y_{10},$$

denn m ist hier gleich 1 und $(X_1 Y_1)_0$ muss gleich Null gesetzt werden; a_1 und b_1 sind nicht gleichzeitig Null. In diesem einfachsten Falle $n = 1$ ist das eben Gesagte natürlich an und für sich evident. Anders liegt die Sache schon beim Falle $n = 2$. Hier lässt die Gleichung (4) *zwei* Lösungen zu:

$$\text{I. } e_1 = 1,\ e_2 = 1,$$
$$\text{II. } e_1 = 2.$$

Man hat daher drei Klassen von Formenpaaren mit den Charakteristiken [11], [(11)], [2]. Die Normalform, auf welche jedes Formenpaar der Klasse [11], d.h. der Klasse mit der Charakteristik [11], gebracht werden kann, lautet

$$\mathsf{A} = a_1(X_1 Y_1)_1 + a_2(X_2 Y_2)_1 = a_1 X_{10} Y_{10} + a_2 X_{20} Y_{20},$$
$$\mathsf{B} = b_1(X_1 Y_1)_1 + b_2(X_2 Y_2)_1 = b_1 X_{10} Y_{10} + b_2 X_{20} Y_{20}.$$

Im Falle [(11)] hat man vorstehend $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ zu nehmen. Im Falle [2] endlich wird

$$\mathsf{A} = a_1(X_1 Y_1)_2 - h(X_1 Y_1)_1 = a_1(X_{10} Y_{11} + X_{11} Y_{10}) - h X_{10} Y_{10},$$
$$\mathsf{B} = b_1(X_1 Y_1)_2 + g(X_1 Y_1)_1 = b_1(X_{10} Y_{11} + X_{11} Y_{10}) + g X_{10} Y_{10};$$

die Konstanten $a_1 | b_1$, $a_2 | b_2$, $g | h$ sind so beschaffen, dass

$$g a_\sigma + h b_\sigma \neq 0 \quad (\sigma = 1, 2)$$

ist.

Nach diesen Beispielen wird man im Stande sein, für jedes gegebene n die Charakteristiken und so die Anzahl der Klassen zu bestimmen, sowie die zu den einzelnen Klassen gehörigen Normalformen aufzustellen. Wir stellen im Folgenden die Charakteristiken und Normalformen aller Klassen von ordinären Paaren bilinearer Formen von $2n$ Variabelen für die Fälle $n = 1, 2, 3, 4$ schematisch zusammen, indem wir z.B. durch

$$1.\ [11]: \begin{matrix} a_1 X_{10} Y_{10} + a_2 X_{20} Y_{20}, \\ b_1 X_{10} Y_{10} + b_2 X_{20} Y_{20} \end{matrix}$$

andeuten, dass es im Falle $n = 2$ erstens eine Klasse von Formenpaaren mit der Charakteristik [11] giebt, und dass die Paare dieser

Klasse auf die Gestalt $a_1 X_{10} Y_{10} + \cdots$, $b_1 X_{10} Y_{10} + \cdots$ gebracht werden können. Um Raum zu sparen, schreiben wir $x_{\sigma\mu}$ für $X_{\sigma\mu}$, $y_{\sigma\nu}$ für $Y_{\sigma\nu}$.

Klassen der ordinären Paare von bilinearen Formen von $2n$ Variabelen bei unbeschränkter linearer Transformation der Variabelen im Falle

a) $n = 1$.

1. [1]: $a_1 x_{10} y_{10}$, $b_1 x_{10} y_{10}$.

b) $n = 2$.

1. [11]: $a_1 x_{10} y_{10} + a_2 x_{20} y_{20}$, $b_1 x_{10} y_{10} + b_2 x_{20} y_{20}$.

2. [(11)]: $a_1 (x_{10} y_{10} + x_{20} y_{20})$, $b_1 (x_{10} y_{10} + x_{20} y_{20})$.

3. [2]: $a_1 (x_{10} y_{11} + x_{11} y_{10}) - h x_{10} y_{10}$, $b_1 (x_{10} y_{11} + x_{11} y_{10}) + g x_{10} y_{10}$.

c) $n = 3$.

1. [111]: $a_1 x_{10} y_{10} + a_2 x_{20} y_{20} + a_3 x_{30} y_{30}$, $b_1 x_{10} y_{10} + b_2 x_{20} y_{20} + b_3 x_{30} y_{30}$.

2. [(11) 1]: $a_1 (x_{10} y_{10} + x_{20} y_{20}) + a_3 x_{30} y_{30}$, $b_1 (x_{10} y_{10} + x_{20} y_{20}) + b_3 x_{30} y_{30}$.

3. [(111)]: $a_1 (x_{10} y_{10} + x_{20} y_{20} + x_{30} y_{30})$, $b_1 (x_{10} y_{10} + x_{20} y_{20} + x_{30} y_{30})$.

4. [21]: $a_1 (x_{10} y_{11} + x_{11} y_{10}) + a_2 x_{20} y_{20} - h x_{10} y_{10}$, $b_1 (x_{10} y_{11} + x_{11} y_{10}) + b_2 x_{20} y_{20} + g x_{10} y_{10}$.

5. [(21)]: $a_1 (x_{10} y_{11} + x_{11} y_{10} + x_{20} y_{20}) - h x_{10} y_{10}$, $b_1 (x_{10} y_{11} + x_{11} y_{10} + x_{20} y_{20}) + g x_{10} y_{10}$.

6. [3]: $a_1 (x_{10} y_{12} + x_{11} y_{11} + x_{12} y_{10}) - h (x_{10} y_{11} + x_{11} y_{10})$, $b_1 (x_{10} y_{12} + x_{11} y_{11} + x_{12} y_{10}) + g (x_{10} y_{11} + x_{11} y_{10})$.

d) $n = 4$.

1. [1111]: $a_1 x_{10} y_{10} + a_2 x_{20} y_{20} + a_3 x_{30} y_{30} + a_4 x_{40} y_{40}$, $b_1 x_{10} y_{10} + b_2 x_{20} y_{20} + b_3 x_{30} y_{30} + b_4 x_{40} y_{40}$.

2. [(11) 11]: $a_1 (x_{10} y_{10} + x_{20} y_{20}) + a_3 x_{30} y_{30} + a_4 x_{40} y_{40}$, $b_1 (x_{10} y_{10} + x_{20} y_{20}) + b_3 x_{30} y_{30} + b_4 x_{40} y_{40}$.

3. $[(11)(11)]$: $\begin{array}{l} a_1(x_{10}y_{10} + x_{20}y_{20}) + a_3(x_{30}y_{30} + x_{40}y_{40}), \\ b_1(x_{10}y_{10} + x_{20}y_{20}) + b_3(x_{30}y_{30} + x_{40}y_{40}). \end{array}$

4. $[(111)1]$: $\begin{array}{l} a_1(x_{10}y_{10} + x_{20}y_{20} + x_{30}y_{30}) + a_4x_{40}y_{40}, \\ b_1(x_{10}y_{10} + x_{20}y_{20} + x_{30}y_{30}) + b_4x_{40}y_{40}. \end{array}$

5. $[(1111)]$: $\begin{array}{l} a_1(x_{10}y_{10} + x_{20}y_{20} + x_{30}y_{30} + x_{40}y_{40}), \\ b_1(x_{10}y_{10} + x_{20}y_{20} + x_{30}y_{30} + x_{40}y_{40}). \end{array}$

6. $[211]$: $\begin{array}{l} a_1(x_{10}y_{11} + x_{11}y_{10}) + a_2x_{20}y_{20} + a_3x_{30}y_{30} - hx_{10}y_{10}, \\ b_1(x_{10}y_{11} + x_{11}y_{10}) + b_2x_{20}y_{20} + b_3x_{30}y_{30} + gx_{10}y_{10}. \end{array}$

7. $[(21)1]$: $\begin{array}{l} a_1(x_{10}y_{11} + x_{11}y_{10} + x_{20}y_{20}) + a_3x_{30}y_{30} - hx_{10}y_{10}, \\ b_1(x_{10}y_{11} + x_{11}y_{10} + x_{20}y_{20}) + b_3x_{30}y_{30} + gx_{10}y_{10}. \end{array}$

8. $[2(11)]$: $\begin{array}{l} a_1(x_{10}y_{11} + x_{11}y_{10}) + a_2(x_{20}y_{20} + x_{30}y_{30}) - hx_{10}y_{10}, \\ b_1(x_{10}y_{11} + x_{11}y_{10}) + b_2(x_{20}y_{20} + x_{30}y_{30}) + gx_{10}y_{10}. \end{array}$

9. $[(211)]$: $\begin{array}{l} a_1(x_{10}y_{11} + x_{11}y_{10} + x_{20}y_{20} + x_{30}y_{30}) - hx_{10}y_{10}, \\ b_1(x_{10}y_{11} + x_{11}y_{10} + x_{20}y_{20} + x_{30}y_{30}) + gx_{10}y_{10}. \end{array}$

10. $[22]$: $\begin{array}{l} a_1(x_{10}y_{11} + x_{11}y_{10}) + a_2(x_{20}y_{21} + x_{21}y_{20}) - h(x_{10}y_{10} + x_{20}y_{20}), \\ b_1(x_{10}y_{11} + x_{11}y_{10}) + b_2(x_{20}y_{21} + x_{21}y_{20}) + g(x_{10}y_{10} + x_{20}y_{20}). \end{array}$

11. $[(22)]$: $\begin{array}{l} a_1(x_{10}y_{11} + x_{11}y_{10} + x_{20}y_{21} + x_{21}y_{20}) - h(x_{10}y_{10} + x_{20}y_{20}), \\ b_1(x_{10}y_{11} + x_{11}y_{10} + x_{20}y_{21} + x_{21}y_{20}) + g(x_{10}y_{10} + x_{20}y_{20}). \end{array}$

12. $[31]$: $\begin{array}{l} a_1(x_{10}y_{12} + x_{11}y_{11} + x_{12}y_{10}) + a_2x_{20}y_{20} - h(x_{10}y_{11} + x_{11}y_{10}), \\ b_1(x_{10}y_{12} + x_{11}y_{11} + x_{12}y_{10}) + b_2x_{20}y_{20} + g(x_{10}y_{11} + x_{11}y_{10}). \end{array}$

13. $[(31)]$: $\begin{array}{l} a_1(x_{10}y_{12} + x_{11}y_{11} + x_{12}y_{10} + x_{20}y_{20}) - h(x_{10}y_{11} + x_{11}y_{10}), \\ b_1(x_{10}y_{12} + x_{11}y_{11} + x_{12}y_{10} + x_{20}y_{20}) + g(x_{10}y_{11} + x_{11}y_{10}). \end{array}$

14. $[4]$: $\begin{array}{l} a_1(x_{10}y_{13} + x_{11}y_{12} + x_{12}y_{11} + x_{13}y_{10}) \\ \qquad - h(x_{10}y_{12} + x_{11}y_{11} + x_{12}y_{10}), \\ b_1(x_{10}y_{13} + x_{11}y_{12} + x_{12}y_{11} + x_{13}y_{10}) \\ \qquad + g(x_{10}y_{12} + x_{11}y_{11} + x_{12}y_{10}). \end{array}$

In den Fällen $n = 1, 2, 3, 4$ haben wir also bez. 1, 3, 6, 14 Klassen von Paaren bilinearer Formen.

51. Von besonderer Einfachheit sind, wie die vorhergehenden Beispiele zeigen, die Normalformen dann, wenn die zugehörige Charakteristik *nur aus Exponenten Eins* besteht. Wir wollen uns mit diesem Falle noch etwas näher befassen.

Besitzt die Determinante einer ordinären Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ bilinearer Formen nur ET mit Exponenten Eins, so kann man A und B durch lineare Substitutionen bez. in Formen

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathsf{A} = a_1 X_1 Y_1 + a_2 X_2 Y_2 + \cdots + a_n X_n Y_n, \\ \mathsf{B} = b_1 X_1 Y_1 + b_2 X_2 Y_2 + \cdots + b_n X_n Y_n \end{cases}$$

überführen, wenn $X_{\sigma 0} = X_\sigma$, $Y_{\sigma 0} = Y_\sigma$ gesetzt wird (47). Nach dem Theoreme IX in 48 besitzt ferner die Determinante

$$|\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}|,$$

wenn A und B die in (5) angegebene Form haben und $a_\sigma | b_\sigma$ $(\sigma = 1, 2, \ldots n)$ nicht gleichzeitig Null sind, die ET

$$(a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2),\quad (a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2), \ldots (a_n\lambda_1 + b_n\lambda_2),$$

also lauter lineare ET. Daher gilt der Satz:*

13) Damit sich zwei bilineare Formen A und B von $2n$ Variabelen durch lineare Substitutionen gleichzeitig auf die Gestalt

$$a_1 X_1 Y_1 + a_2 X_2 Y_2 + \cdots + a_n X_n Y_n,$$
$$b_1 X_1 Y_1 + b_2 X_2 Y_2 + \cdots + b_n X_n Y_n$$

bringen lassen, wo $a_\sigma | b_\sigma$ $(\sigma = 1, 2, \ldots n)$ nicht beide Null sind, ist nothwendig und hinreichend, dass die Determinante

$$|\lambda_1 A + \lambda_2 B|$$

nicht identisch Null ist und lauter lineare Elementartheiler besitzt, oder wie man auch sagen kann (6, Satz 4), *dass jeder lineare Theiler der Determinante $|\lambda_1 A + \lambda_2 B|$, wenn er in derselben zur l^{ten} Potenz auftritt, in allen Subdeterminanten $(l-1)^{\text{ten}}$ Grades ihres Systems zur $(l-1)^{\text{ten}}$ Potenz auftritt.*

Wir wenden uns jetzt zu dem seither beständig ausgeschlossenen Falle, wo die Determinante der zu untersuchenden Formenschaar *identisch Null* ist.

§ 8. Reduktion einer singulären Schaar von bilinearen Formen nach Kronecker.

52. Wenn die Determinante einer Schaar von bilinearen Formen identisch Null ist, so ist von Kronecker** eine ihr äquivalente reducirte Formenschaar hergeleitet worden, welche ganz ähnlich gebaut ist, wie die Weierstrass'sche reducirte Schaar einer ordinären Schaar in 47. Ist nämlich zunächst wieder die Determinante einer Schaar nicht identisch Null, so kann man die Grundformen φ und ψ so wählen, dass

---

* Weierstrass, BM 1868, S. 331 [Ges. W. Bd. II, S. 41—42].

** Vergl. zu diesem Paragraphen: Kronecker, SB 1890, S. 1225 flg. — Wenn im Folgenden von einer linearen Substitution schlechthin gesprochen wird, ist stets eine solche mit nicht verschwindender Determinante gemeint.

die Determinante der einen, etwa von φ, nicht Null ist. Denn setzt man (37),

$$\lambda_1 = g\lambda_1' + g'\lambda_2', \quad \lambda_2 = h\lambda_1' + h'\lambda_2',$$

so geht die Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ über in eine Schaar

$$\lambda_1'(gA + hB) + \lambda_2'(g'A + h'B) = \lambda_1'\varphi + \lambda_2'\psi.$$

Wählt man nun

$$gh' - g'h \neq 0, \quad |gA + hB| \neq 0,$$

so ist jede Form der Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ auch eine solche der Schaar $\lambda_1'\varphi + \lambda_2'\psi$, und umgekehrt, d. h. die Gesammtheit der durch $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ dargestellten Formen ist identisch mit der Gesammtheit der durch $\lambda_1'\varphi + \lambda_2'\psi$ dargestellten Formen; ferner ist $|\varphi|$ nicht Null. Bedeuten dann

$$\begin{array}{lll} (\lambda - c_1)^{e_1'}, & (\lambda - c_1)^{e_2'}, & \ldots (\lambda - c_1)^{e'_{k'}}, \\ (\lambda - c_2)^{e_1''}, & (\lambda - c_2)^{e_2''}, & \ldots (\lambda - c_2)^{e''_{k''}}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (\lambda - c_h)^{e_1^{(h)}}, & (\lambda - c_h)^{e_2^{(h)}}, & \ldots (\lambda - c_h)^{e^{(h)}_{k^{(h)}}} \end{array}$$

die sämmtlichen ET der Determinante

$$|\lambda\varphi + \psi|,$$

so kann man, wenn abkürzend

$$\Phi_k^{(\varrho)} = \sum X_{\varkappa\mu}^{(\varrho)} Y_{\varkappa\nu}^{(\varrho)} \; (\mu + \nu = e_\varkappa^{(\varrho)} - 1, \quad \mu = 0, 1, \ldots e_\varkappa^{(\varrho)} - 1),$$

$$\Psi_\varkappa^{(\varrho)} = \sum X_{\varkappa\mu}^{(\varrho)} Y_{\varkappa\nu}^{(\varrho)} \; (\mu + \nu = e_\varkappa^{(\varrho)} - 2, \quad \mu = 0, 1, \ldots e_\varkappa^{(\varrho)} - 2)$$

gesetzt wird, durch lineare Substitutionen φ in

(1) $$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = \Phi_1' + \Phi_2', \cdots + \Phi_{k'}' + \Phi_1'' + \Phi_2'' + \cdots + \Phi_{k''}'' + \cdots \\ \qquad \cdots + \Phi_1^{(h)} + \Phi_2^{(h)} \cdots\cdots\cdots\cdots + \Phi_{k^{(h)}}^{(h)} \end{array} \right.$$

$$= \sum_{\varkappa,\,\varrho} \Phi_\varkappa^{(\varrho)},$$

ψ in

(2) $$\Psi = \sum_{\varkappa,\,\varrho} c_\varrho \Phi_\varkappa^{(\varrho)} + \sum_{\varkappa,\,\varrho} \Psi_\varkappa^{(\varrho)}$$

transformiren, wenn wir die in (1) rechts stehende Summe kurz mit $\sum \Phi_\varkappa^{(\varrho)}$, die Summe

$$\Psi_1' + \Psi_2' + \cdots + \Psi_1'' + \Psi_2'' + \cdots + \Psi_1^{(h)} + \Psi_2^{(h)} + \cdots$$

mit $\sum_{\varkappa,\,\varrho} \Psi_\varkappa^{(\varrho)}$ bezeichnen und für $e_\varkappa^{(\varrho)} = 1$

$$\Psi_\varkappa^{(\varrho)} = 0$$

setzen (44, 46). Wir können also bei dieser Bezeichnungsweise die Schaar $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$ in eine Schaar von der Gestalt

$$(3)\qquad \lambda_1 \Phi + \lambda_2 \Psi = \sum_{\varkappa, \varrho} [(\lambda_1 + c_\varrho \lambda_2) \Phi_\varkappa^{(\varrho)} + \lambda_2 \Psi_\varkappa^{(\varrho)}]$$

linear transformiren. *Auf eben diese Form kann aber auch bei passender Wahl der Grundformen jede singuläre Schaar von bilinearen Formen gebracht werden, nur dass alsdann für ein bestimmtes* ϱ *diejenigen* X *oder* Y, *deren zweiter unterer Index* $e_\varkappa^{(\varrho)} - 1$ *ist, sowie das zugehörige* c_ϱ *gleich Null zu nehmen sind;* diese Schaar (3) ist eine reducirte Schaar.*

Wir gehen jetzt auf den Gegenstand näher ein.

53. Es seien φ und ψ zwei bilineare Formen, deren jede von r Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_r$ und s Variabelen $y_1, y_2, \ldots y_s$ abhänge. Die Anzahl der Variabelen x_i der einen Reihe, ebenso die der Variabelen y_i der anderen Reihe darf in beiden Formen als gleich vorausgesetzt werden (vergl. S. 4, Anm.).** Die Determinante der Schaar $\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi$ verschwinde identisch (dies tritt z. B. dann ein, wenn $r \gtrless s$ ist). Alsdann sind die Ableitungen von

$$\lambda \varphi - \psi$$

nach den Variabelen mindestens einer Reihe, etwa nach den $x_1, x_2, \ldots x_r$, durch mindestens eine lineare Relation verknüpft. Setzen wir

$$(4)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi_i, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \psi_i, \quad \lambda \varphi - \psi = f, \quad \lambda \varphi_i - \psi_i = f_i,$$

so besteht also zwischen den $f_1, f_2, \ldots f_r$ eine gewisse Anzahl unabhängiger linearer Relationen.

Es muss hier eine für das Folgende höchst wichtige Bemerkung eingeschaltet werden:

Sei

$$A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_r f_r = 0$$

eine zwischen den f_i bestehende Relation, deren Koefficienten A_i in λ vom Grade g seien. Geht nun f durch eine lineare Substitution

$$x_i = \alpha_{1i} x_1' + \alpha_{2i} x_2' + \cdots + \alpha_{ri} x_r' \quad (i = 1, 2, \ldots r),$$

deren Koefficienten α_{ik} *von* λ *unabhängig seien*, in f' *** über, setzt man ferner

$$\frac{\partial f'}{\partial x_i'} = f_i' \quad (i = 1, 2, \ldots r),$$

so wird wegen

---

* Und zwar ist für dieses ϱ *entweder* $X^{(\varrho)}_{\varkappa, e_\varkappa^{(\varrho)} - 1}$ *oder* $Y^{(\varrho)}_{\varkappa, e_\varkappa^{(\varrho)} - 1}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$ gleich Null zu setzen.

** Es treten also mindestens in einer Form wirklich r Variabelen x_i und s Variabelen y_i auf. Aufzufassen haben wir aber die Schaar stets als eine von ebensovielen Variabelen x_i als Variabelen y_k abhängige (vergl. S. 4, Anm.). Ist z. B. $r > s$, und es wird eine lineare Substitution für die y_k ausgeführt, so haben wir dieselbe in Gedanken durch $y_{s+1} = y_{s+1}', \ldots y_r = y_r'$ zu vervollständigen.

*** f' bedeutet also hier ausnahmsweise nicht die zu f conjugirte Form.

$$f = x_1 f_1 + \cdots + x_r f_r,$$
$$f' = (\alpha_{11} x_1' + \cdots + \alpha_{r1} x_r') f_1 + \cdots + (\alpha_{1r} x_1' + \cdots + \alpha_{rr} x_r') f_r,$$

und somit sind die f_i' lineare Formen der f_i; da

$$\sum \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \ldots \alpha_{rr} \neq 0$$

ist, so kann man auch umgekehrt die f_i linear durch die f_i' ausdrücken. *Aus der linearen Relation* $\sum_i f_i A_i = 0$ *zwischen den* f_i *folgt daher eine solche zwischen den* f_i', *und zwar ist dieselbe vom Grade* g *oder niederem in* λ. Führt man eine analoge lineare Substitution für die y_k aus, so sind selbstverständlich die Ableitungen der transformirten Form nach $x_1, x_2, \ldots x_r$ durch eine lineare Relation verknüpft, deren Koefficienten eben die A_i sind.

Aus den linearen Relationen zwischen den f_i leiten wir nun durch lineare Verbindung eine solche Relation ab, welche in λ von *möglichst niedrigem Grade ist.* Diese sei

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} \sum_{\beta=1}^{\beta=r} c_{\alpha\beta} \lambda^\alpha f_\beta = C_0 \lambda^0 + C_1 \lambda^1 + \cdots + C_m \lambda^m = 0, \tag{5}$$

wo

$$C_\alpha = c_{\alpha 1} f_1 + c_{\alpha 2} f_2 + \cdots + c_{\alpha r} f_r \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots m) \tag{6}$$

zu setzen ist. Dabei ist stets

$$m \leqq s, \quad m < r,$$

wenn

$$s \leqq r$$

ist. *Wir dürfen nun voraussetzen, dass*

$$m > 0$$

ist. Denn für $m = 0$ wird (5) zu

$$c_{01} f_1 + c_{02} f_2 + \cdots + c_{0r} f_r = 0;$$

es ist dann also wegen (4)

$$c_{01} \varphi_1 + c_{02} \varphi_2 + \cdots + c_{0r} \varphi_r = 0,$$
$$c_{01} \psi_1 + c_{02} \psi_2 + \cdots + c_{0r} \psi_r = 0.$$

Da nun nicht alle $c_{0\beta}$ Null sind, dürfen wir $c_{0\gamma} \neq 0$ voraussetzen, wo γ eine der Zahlen $1, 2, \ldots r$ bedeutet. Substituirt man jetzt

$$x_\beta = x_\beta' + c_{0\gamma} x_\gamma' \quad (\beta = 1, 2, \ldots \gamma - 1, \gamma + 1, \ldots r),$$
$$x_\gamma = x_\gamma',$$

so wird

$$\varphi = x_1 \varphi_1 + \cdots + x_r \varphi_r = x_1' \varphi_1 + \cdots + x_{\gamma-1}' \varphi_{\gamma-1} + x_{\gamma+1}' \varphi_{\gamma+1} + \cdots + x_r' \varphi_r$$
$$+ x_\gamma' [c_{01} \varphi_1 + c_{02} \varphi_2 + \cdots + c_{0r} \varphi_r];$$

der Klammerausdruck ist aber Null, also *fehlt* in φ die Variabele x'_γ; Analoges gilt für ψ. Man kann also bei $m = 0$ durch eine lineare Substitution mit von $\lambda_1 | \lambda_2$ unabhängigen Koefficienten die Schaar $\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi$ so transformiren, dass eine Variabele x_i weniger auftritt. *Wir können und wollen aber voraussetzen, dass die Schaar $\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi$ keiner anderen äquivalent sei, in welcher weniger als r Variabele x_i oder s Variabele y_i auftreten.*

54. Die $m + 1$ Ausdrücke C_α sind linear unabhängig in dem Sinne, dass keine Relation

$$(7) \qquad a_0 C_0 + a_1 C_1 + \cdots + a_m C_m = 0$$

existiren kann, in der die Koefficienten $a_0, a_1, \ldots a_m$ von λ unabhängige Konstante wären. Angenommen, es gäbe eine Relation (7), in der die Koefficienten a_α nicht von λ abhingen; alsdann kann man, da

$$a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \cdots + a_m$$

in λ nicht identisch Null ist, für (5) auch

$$(8) \qquad (a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \cdots + a_m)(C_0 \lambda^0 + C_1 \lambda + \cdots + C_m \lambda^m) = 0$$

schreiben. Rechnet man aber das hier links stehende Produkt aus, so wird wegen (7) der Koefficient von λ^m Null, und (8) daher von der Gestalt

$$(9) \qquad f_1 g_1(\lambda) + \cdots + f_r g_r(\lambda) + \lambda^{m+1} [f_1 h_1(\lambda) + \cdots + f_r h_r(\lambda)] = 0,$$

wo die $g_i(\lambda)$, $h_i(\lambda)$ ganze Funktionen *höchstens* $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades von λ bedeuten, die nicht alle identisch Null sind. Setzt man jetzt in (9)

$$f_i = \lambda \varphi_i - \psi_i,$$

so geht die Summe der r ersten Glieder in einen Ausdruck über, der nur Potenzen von λ enthält, die $\leq m$ sind, der übrige Theil von (9) aber in einen solchen, der in λ von höherem als m^{ten} Grade ist. Die so erhaltene Gleichung gilt aber für jedes λ, also ist jeder der eben beschriebenen Theile für sich Null. Es gäbe unter der gemachten Voraussetzung also eine Gleichung

$$f_1 g_1(\lambda) + \cdots + f_r g_r(\lambda) = 0$$

von niederem als m^{ten} Grade, entgegen unserer oben gemachten Annahme.

Da nun die C_α im angegebenen Sinne unabhängig sind, so bilden die Koefficienten $c_{\alpha\beta}$ ein System

$$\begin{matrix} c_{01} & c_{02} & \cdots & c_{0r} \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mr} \end{matrix}$$

von $r.(m+1)$ Elementen, in welchem nicht alle Subdeterminanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades Null sind. Wir können daher Koefficienten $c_{p\beta}$ so hinzufügen, dass ein quadratisches System entsteht, dessen Determinante

$$|c_{\alpha\beta}| \quad (\alpha = 0, 1, \ldots r-1;\ \beta = 1, 2, \ldots r)$$

nicht Null ist. Durch die lineare Substitution

$$x_k = \sum c_{ik} x_i' \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots r-1 \\ k = 1, 2, \ldots r \end{pmatrix},$$

deren Koefficienten von λ unabhängig sind, mögen nun f, φ und ψ in Formen übergehen, die wir bez. mit f', φ' und ψ' bezeichnen wollen. Setzen wir noch

$$f_i' = \frac{\partial f'}{\partial x_i'}, \quad \varphi_i' = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}, \quad \psi_i' = \frac{\partial \psi'}{\partial x_i'} \quad (i = 0, 1, \ldots r-1),$$

so wird, da

$$f' = \sum c_{i1} x_i' \cdot f_1 + \cdots + \sum c_{ir} x_i' \cdot f_r \quad (i = 0, 1, \ldots r-1)$$

ist

(10) $$f_i' = c_{i1} f_1 + \cdots + c_{ir} f_r,$$

mithin wegen (6) und (5)

$$f_0' \lambda^0 + f_1' \lambda^1 + \cdots + f_m' \lambda^m = C_0 \lambda^0 + C_1 \lambda^1 + \cdots + C_m \lambda^m = 0$$

oder

$$\sum (\lambda \varphi_\alpha' - \psi_\alpha') \lambda^\alpha = 0 \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots m)$$

bei jedem λ. Daher ist

$$\psi_0' = 0, \quad \varphi_m' = 0, \quad \psi_1' = \varphi_0', \quad \psi_2' = \varphi_1', \ldots \psi_m' = \varphi_{m-1}'.$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar, da

$$f_\alpha' = \lambda \varphi_\alpha' - \psi_\alpha'$$

ist,

(11) $$f_0' = \lambda \psi_1', \quad f_1' = \lambda \psi_2' - \psi_1', \ldots f_m' = -\psi_m'.$$

Diese Gleichungen lehren, dass zwischen den m linearen Formen $\psi_1', \psi_2', \ldots \psi_m$ keine linearen Relationen bestehen. Denn aus einer solchen Relation würde wegen (11) eine Relation zwischen den $f_0', f_1', \ldots f_m'$ resultiren, deren Koefficienten in λ vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade wären, was wiederum wegen (10) (vergl. auch die Bemerkung S. 95—96) eine Relation zwischen den $f_1, f_2, \ldots f_r$ zur Folge hätte, die in λ von einem Grade $\leq m-1$ wäre, gegen die Voraussetzung.

Wir können daher eine weitere lineare Substitution ausführen, indem wir durch die s Gleichungen

$$\mathfrak{y}_\alpha = \psi'_\alpha = \varphi'_{\alpha-1}, \quad \mathfrak{y}_{m+1} = y_{m+1}, \ldots \mathfrak{y}_s = y_s (\alpha = 1, \ldots m)$$

an Stelle der y_k neue Variabele $\mathfrak{y}_k (k = 1, 2, \ldots s)$ treten lassen. Durch diese Substitution geht die Schaar

$$\lambda_1 \varphi' + \lambda_2 \psi' = \sum (\lambda_1 \varphi'_i + \lambda_2 \psi'_i) x'_i \quad (i = 0, 1, \ldots r-1)$$

in eine andere von der Gestalt

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} (\lambda_1 x'_{\alpha-1} + \lambda_2 x'_\alpha) \mathfrak{y}_\alpha + \sum_{k=1}^{k=s} \sum_{p=m+1}^{p=r-1} (\lambda_1 a_{pk} + \lambda_2 b_{pk}) x'_p \mathfrak{y}_k$$

über; diese Schaar endlich wird durch die Substitution

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_0 &= x'_0 + \sum_p a_{p1} x'_p, \\ \mathfrak{x}_\alpha &= x'_\alpha + \sum_p b_{p\alpha} x'_p, \\ \mathfrak{x}_p &= x'_p \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots m \\ p = m+1, \ldots r-1 \end{pmatrix},$$

in

(12) $$S = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} (\lambda_1 \mathfrak{x}_{\alpha-1} + \lambda_2 \mathfrak{x}_\alpha) \mathfrak{y}_\alpha + \lambda_1 \sum_{\alpha=2}^{\alpha=m} u_\alpha \mathfrak{y}_\alpha + \lambda_1 \Phi + \lambda_2 \Psi$$

übergeführt, wo $u_2, u_3, \ldots u_m$ lineare Funktionen von $\mathfrak{x}_{m+1}, \mathfrak{x}_{m+2}, \ldots \mathfrak{x}_{r-1}$ und Φ und Ψ bilineare Formen der Veränderlichen

$$\mathfrak{x}_p, \mathfrak{y}_q \begin{pmatrix} p = m+1, \ldots r-1 \\ q = m+1, \ldots s \end{pmatrix}$$

bedeuten.

55. Der Rang des Koefficientensystems der zu reducirenden Schaar sei R; wir wollen nun die Grundformen φ und ψ so gewählt denken, dass *der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten R^{ten} Grades des Systems von $|\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi|$ den linearen Theiler λ_2 nicht enthält* (37). Alsdann bringen wir die Schaar in die Gestalt (12). Daselbst ist

(13) $$\lambda_1 \Phi + \lambda_2 \Psi$$

eine Schaar, in welcher $r - m - 1$ Variabele $\mathfrak{x}_p$ und $s - m$ Variabele $\mathfrak{y}_q$ auftreten. Ist nun τ der Rang des Koefficientensystems dieser Schaar (13), so behaupten wir, dass nicht alle Subdeterminanten τ^{ten} Grades dieses Systems durch λ_2 theilbar sind, oder anders ausgedrückt, *dass der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten τ^{ten} Grades dieses Systems den linearen Theiler λ_2 nicht enthält.* Denken wir uns nämlich zunächst einmal die Determinante der Schaar S vollständig aufgeschrieben, so ist also, $r \geqq s$ vorausgesetzt*,

* Die $\frac{\partial^2 S}{\partial \mathfrak{x}_i \partial \mathfrak{y}_k}$ sind wirklich aus (12) zu berechnen und dann, wie nachstehend angegeben, anzuordnen.

$$|S| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial \mathfrak{x}_0 \partial \mathfrak{y}_1} & \frac{\partial^2 S}{\partial \mathfrak{x}_1 \partial \mathfrak{y}_1} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial \mathfrak{x}_{r-1} \partial \mathfrak{y}_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \mathfrak{x}_0 \partial \mathfrak{y}_s} & \frac{\partial^2 S}{\partial \mathfrak{x}_1 \partial \mathfrak{y}_s} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial \mathfrak{x}_{r-1} \partial \mathfrak{y}_s} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix};$$

bei $r = s$ fallen die letzten Nullreihen weg.

Der Rang desjenigen Systems $\mathfrak{S}_1$, welches aus den m ersten Zeilen des Systems $\mathfrak{S}$ von $|S|$ besteht, ist m; der Rang desjenigen Systems $\mathfrak{S}_2$, welches aus den letzten $r - m$ Zeilen von $\mathfrak{S}$ besteht, werde mit m' bezeichnet; dann ist $m' = \tau$. Nicht alle Subdeterminanten $(m + m')^{\text{ten}}$ Grades von $\mathfrak{S}$ sind* Null, aber alle Subdeterminanten höheren Grades; denn sie enthalten mehr als m' Zeilen aus $\mathfrak{S}_2$, verschwinden also, wenn man sie nach den Subdeterminanten ihrer aus $\mathfrak{S}_2$ stammenden Zeilen entwickelt; $m + m'$ ist daher der Rang von $\mathfrak{S}$ oder es ist

$$m + m' = R.$$

Wie wir eben sahen, ist eine Subdeterminante $(m + m')^{\text{ten}}$ Grades von $\mathfrak{S}$ Null, wenn sie mehr als m' Zeilen aus $\mathfrak{S}_2$ enthält; jede nicht verschwindende Subdeterminante $(m + m')^{\text{ten}}$ Grades von $\mathfrak{S}$ enthält also genau m' Zeilen aus $\mathfrak{S}_2$, ist somit eine lineare Form gewisser Subdeterminanten m'^{ten} Grades von $\mathfrak{S}_2$, oder wie auch gesagt werden kann, gewisser Subdeterminanten m'^{ten} Grades des Systems von $|\lambda_1 \Phi + \lambda_2 \Psi|$. Wären nun alle Subdeterminanten m'^{ten} Grades des letzteren Systems durch λ_2 theilbar, so gälte daher das Gleiche von den Subdeterminanten $(m + m') = R^{\text{ten}}$ Grades von $\mathfrak{S}$, und somit auch von denjenigen des Systems von $|\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi|$ (39), gegen die Voraussetzung. Da nun $m' = \tau$ ist, so ist damit unsere Behauptung vollständig bewiesen.

56. Der erste Theil

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} (\lambda_1 \mathfrak{x}_{\alpha-1} + \lambda_2 \mathfrak{x}_\alpha) \mathfrak{y}_\alpha$$

von S *hat bereits* die Gestalt

(14) $$(\lambda_1 + c_\varrho \lambda_2) \Phi_x^{(\varrho)} + \lambda_2 \Psi_x^{(\varrho)});$$

dieses erkennt man, wenn man in (14)

(15) $$\begin{cases} c_\varrho = 0, \quad Y_{x, e_x^{(\varrho)}-1}^{(\varrho)} = 0, \quad e_x^{(\varrho)} - 1 = m, \quad X_{x,m}^{(\varrho)} = \mathfrak{x}_0, \\ X_{x,m-\alpha}^{(\varrho)} = \mathfrak{x}_\alpha, \quad Y_{x,\alpha-1}^{(\varrho)} = \mathfrak{y}_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots m) \end{cases}$$

setzt (vergl. 52, Schluss).

* Der Zusatz „identisch“ ist wohl selbstverständlich.

Verschwindet nun die Determinante des letzten Theiles

$$\lambda_1\Phi + \lambda_2\Psi$$

von S *nicht* identisch, so kann diese Schaar auf die Gestalt

$$\sum[(\lambda_1 + c_\varrho\lambda_2)\Phi_x^{(\varrho)} + \lambda_2\Psi_x^{(\varrho)}]$$

gebracht werden; denn nach dem in 55 Gezeigten *verschwindet dann die Determinante*

$$|\lambda_1\Phi + \lambda_2\Psi|$$

von $\lambda_1\Phi + \lambda_2\Psi$ *nicht für* $\lambda_2 = 0$, also ist $|\Phi| \neq 0$, und man kann nach Weierstrass die Schaar $\lambda_1\Phi + \lambda_2\Psi$ auf die angegebene Gestalt bringen (46, 52). Bei den hierzu erforderlichen Transformationen *bleibt der erste Theil von S ungeändert*, der zweite

$$\lambda_1\sum_{\alpha=2}^{\alpha=m} u_\alpha \mathfrak{y}_\alpha$$

wird in einen analog gebauten Ausdruck übergeführt, d. h. in einen solchen, der von den Variabelen der zweiten Reihe nur $\mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3, \ldots \mathfrak{y}_m$ und von den Variabelen der ersten Reihe nur solche enthält, die nicht im ersten Theile von S auftreten.

Verschwindet aber die Determinante der Schaar $\lambda_1\Phi + \lambda_2\Psi$ *identisch*, so wenden wir auf diese Schaar sofort das in 53 und 54 beschriebene Verfahren an. Berücksichtigt man nun, dass die Zahl der Veränderlichen beider Reihen im letzten Theile der nach einander zu behandelnden Schaaren $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$, $\lambda_1\Phi + \lambda_2\Psi$, u. s. w., immer kleiner wird, hält man ferner fest, dass der grösste gemeinschaftliche Theiler der Determinanten ω-ten Grades des Koefficientensystems einer solchen Restschaar vom Range ω für $\lambda_2 = 0$ nicht Null ist (55), so ist vorläufig dargethan, dass sich unsere Schaar $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$ in eine äquivalente überführen lässt, die sich von der in 52 beschriebenen Schaar (3) im Baue nur durch Glieder von der Form des zweiten Theiles in S unterscheidet. *Wir wollen nur die Möglichkeit der successiven Wegschaffung dieser letzteren Glieder ohne die Gestalt der übrigen zu ändern für die Restschaar* $\lambda_1\Phi + \lambda_2\Psi$ *als bewiesen annehmen* oder anders gesagt, wir wollen voraussetzen, dass es zu $\lambda_1\Phi + \lambda_2\Psi$ eine äquivalente reducirte Schaar von der am Schlusse von 52 beschriebenen Art giebt. Bei den hierzu nothwendigen Transformationen gehen die Veränderlichen $\mathfrak{x}_p$ in gewisse Veränderliche $X_{x\mu}^{(\varrho)}$ über, und $u_2, u_3, \ldots u_m$ werden lineare Funktionen dieser Veränderlichen $X_{x\mu}^{(\varrho)}$ *allein*. Angenommen nämlich, es bliebe in den Formen u_α noch eine Variabele $\mathfrak{x}_p$ zurück, so bilde man die $m+1$ Ableitungen der Schaar nach $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \ldots \mathfrak{x}_m, \mathfrak{x}_p$; diese sind lineare Formen der $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots \mathfrak{y}_m$; durch Elimination derselben erhält man zwischen den $m+1$ Ableitungen eine lineare Relation, die in

$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ höchstens $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades ist, gegen die in 53 gemachte Annahme.

Lassen wir nun in (15) die Indices $\varkappa$ und ϱ weg, so verwandelt sich unsere Schaar S vermöge (15) und der vorbeschriebenen Transformationen in

$$(16) \quad \lambda_1 \Phi^0 + \lambda_2 \Psi^0 + \lambda_1 \sum_{\alpha=1}^{\alpha=e-2} F_\alpha Y_\alpha + \sum_{\varkappa,\varrho} [(\lambda_1 + \lambda_2 c_\varrho) \Phi_\varkappa^{(\varrho)} + \lambda_2 \Psi_\varkappa^{(\varrho)}],$$

wo

$$\Phi^0 = X_1 Y_{e-2} + X_2 Y_{e-3} + \cdots + X_{e-1} Y_0,$$
$$\Psi^0 = X_0 Y_{e-2} + X_1 Y_{e-3} + \cdots + X_{e-2} Y_0$$

zu setzen ist, die $\Phi_\varkappa^{(\varrho)}$, $Y_\varkappa^{(\varrho)}$ in 52 definirt sind und $F_1, F_2, \ldots F_{e-2}$ lineare Formen der Variabelen $X_{\varkappa\mu}^{(\varrho)}$ sind (für $m = r - 1$ fallen die beiden letzten Summen in (16) sofort weg). Der erste Theil

$$\lambda_1 \Phi^0 + \lambda_2 \Psi^0$$

von (16) hat die Gestalt (14), und *zwar ist hier c_ϱ und dasjenige Y, dessen zweiter unterer Index $e_\varkappa^{(\varrho)} - 1$ ist, Null zu setzen* [vergl. (15)]. Derartige Schaaren werden im Allgemeinen auch im letzten Theile von (16) noch auftreten; daher wurden der Unterscheidung wegen die Indices $\varkappa$ und ϱ in $\lambda_1 \Phi^0 + \lambda_2 \Psi^0$ weggelassen. Ferner können im letzten Theile von (16) noch Schaaren (14) auftreten, *in denen c_ϱ und dasjenige X, dessen zweiter unterer Index $e_\varkappa^{(\varrho)} - 1$ ist, gleich Null zu setzen ist.* Endlich ist $e - 1 = m$.

57. Wir wollen nun zeigen, wie der mittlere Theil

$$\sum F_\alpha Y_\alpha \quad (\alpha = 2, \ldots e - 2)$$

von (16) durch weitere Transformationen weggeschafft werden kann, ohne dass die Gestalt der Schaar im Uebrigen geändert wird. *Damit ist zugleich die Zulässigkeit der vorhin gemachten Voraussetzung nachgewiesen.*

Wenn F_α das Glied $D_\alpha X_{\varkappa\mu}^{(\varrho)}$ enthält und $X_{\varkappa\mu}^{(\varrho)}$ eine derjenigen Variabelen ist, welche in dem mit λ_1 multiplizirten Theile von (16) vorkommen, so fällt bei der Substitution

$$X_k = \mathfrak{X}_k + D_\alpha (c_\varrho X_{\varkappa\mu}^{(\varrho)} + X_{\varkappa,\mu-1}^{(\varrho)}) \quad (k = e - \alpha - 2),$$
$$Y_{\varkappa\nu}^{(\varrho)} = \mathfrak{Y}_{\varkappa\nu}^{(\varrho)} - D_\alpha Y_\alpha \quad (\nu = e_\varkappa^{(\varrho)} - \mu - 1)$$

eben jenes Glied $D_\alpha X_{\varkappa\mu}^{(\varrho)}$ in F_α weg, im Uebrigen aber bleibt die Form der Schaar erhalten, nur dass für $\alpha < e - 2$

$$F_{\alpha+1} + c_\varrho C_\alpha X_{\varkappa\mu}^{(\varrho)} + C_\alpha X_{\varkappa,\mu-1}^{(\varrho)}$$

an die Stelle von $F_{\alpha+1}$ tritt. Auf diese Weise sind also nach einander aus $F_1, F_2, \ldots F_{e-2}$ die sämmtlichen Glieder $D_\alpha X_{\varkappa\mu}^{(\varrho)}$ $(\alpha = 1 \ldots e - 2)$

wegzuschaffen, und es können dann nur solche Variabele $X_{\varkappa\mu}^{(\varrho)}$ darin zurückbleiben, welche *ausschliesslich* in dem mit λ_2 multiplizirten Theile von (16) auftreten, d. h. nur Variabele $X_{\varkappa 0}^{(\varrho)}$, für welche $c_\varrho = 0$, $Y_{\varkappa, e_\varkappa^{(\varrho)}-1}^{(\varrho)} = 0$ ist. Wir denken uns in (16) die eben beschriebenen Substitutionen wirklich ausgeführt; die so erhaltene Schaar hat also dann wieder die Gestalt (16), nur dass jetzt in

$$\sum F_\alpha Y_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots e-2)$$

nur die zuletzt ausgeführten Variabelen $X_{\varkappa 0}^{(\varrho)}$ auftreten. *Aber auch zur Beseitigung jeder einzelnen dieser Variabelen $X_{\varkappa 0}^{(\varrho)}$ ist ebendasselbe Transformationsverfahren zu gebrauchen*, welches wir eben zur Wegschaffung der $X_{\varkappa\mu}^{(\varrho)}$ angewandt haben. Wenn nämlich $X_{\varkappa 0}^{(\varrho)}$ in F_α mit dem Koefficienten D_α versehen vorkommt, so wird durch die Substitution

$$X_\gamma = \mathfrak{X}_\gamma - D_\alpha X_{\varkappa\delta}^{(\varrho)}, \quad Y_{\varkappa\nu}^{(\varrho)} = \mathfrak{Y}_{\varkappa\nu}^{(\varrho)} + D_\alpha Y_{\alpha-\mu}$$

$$\begin{pmatrix} \delta = 0, 1, \dots \alpha; & \delta - \gamma = e - \alpha - 1 \\ \mu = 1, 2, \dots \alpha; & \mu + \nu = e_\varkappa^{(\varrho)} - 1 \end{pmatrix}$$

das Glied $D_\alpha X_{\varkappa 0}^{(\varrho)}$ in Wegfall gebracht. Dabei dürfen natürlich die mit ν bezeichneten hinteren Indices nicht kleiner als Null werden. Nun ist μ höchstens gleich α, also ist

$$\mu \leqq e - 2;$$

mithin ist der kleinste Werth von ν

$$e_\varkappa^{(\varrho)} - 1 - e + 2 = e_\varkappa^{(\varrho)} - e + 1.$$

Der Index ν ist also grösser als die Differenz

$$e_\varkappa^{(\varrho)} - e;$$

diese Differenz ist aber, wie wir sofort beweisen werden, stets positiv. Wir bezeichnen die Schaar (16) mit S und bilden die Ableitungen von S nach den Veränderlichen

$$X_1, \dots, X_m = X_{e-1}, \quad X_{\varkappa 0}^{(\varrho)}, \dots, X_{\varkappa, e_\varkappa^{(\varrho)}-1};$$

das sind

$$m + e_\varkappa^{(\varrho)} = e - 1 + e_\varkappa^{(\varrho)}$$

Ableitungen; sie sind abhängig von den Variabelen

$$Y_0, Y_1, \dots Y_{e-2}, \quad Y_{\varkappa 0}^{(\varrho)}, \dots Y_{\varkappa, e_\varkappa^{(\varrho)}-2};$$

das sind

$$e - 1 + e_\varkappa^{(\varrho)} - 1 = e + e_\varkappa^{(\varrho)} - 2$$

Variabele. Daher entsteht zwischen diesen Ableitungen durch Elimination der Veränderlichen Y eine lineare Relation, die durch Entwickelung der Determinante in der Gleichung

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial S}{\partial X_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\
\frac{\partial S}{\partial X_2} & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial S}{\partial X_{m-1}} & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\
\frac{\partial S}{\partial X_m} & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\
\frac{\partial S}{\partial X^{(\varrho)}_{\varkappa 0}} & 0 & D_1 & \cdots & D_{m-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_2 \\
\frac{\partial S}{\partial X^{(\varrho)}_{\varkappa 1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 & \lambda_1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial S}{\partial X^{(\varrho)}_{\varkappa, e^{(\varrho)}_\varkappa - 2}} & 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & & 0 \\
\frac{\partial S}{\partial X^{(\varrho)}_{\varkappa, e^{(\varrho)}_\varkappa - 1}} & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & & 0
\end{vmatrix} = 0$$

erhalten wird. Es wird

$$17)\left\{\begin{aligned} & \lambda_1^{e^{(\varrho)}_\varkappa}\left\{\frac{\partial S}{\partial X_1}\cdot A_1 + \cdots + \frac{\partial S}{\partial X_m}\cdot A_m\right\} + \\ & \lambda_1^m\left\{\frac{\partial S}{\partial X^{(\varrho)}_{\varkappa 0}}\cdot \lambda_1^{e^{(\varrho)}_\varkappa - 1} - \frac{\partial S}{\partial X^{(\varrho)}_{\varkappa 1}}\cdot \lambda_1^{e^{(\varrho)}_\varkappa - 2}\lambda_2 + \cdots \pm \frac{\partial S}{\partial X_{\varkappa, e^{(\varrho)}_\varkappa - 1}}\cdot \lambda_2^{e^{(\varrho)}_\varkappa - 1}\right\} = 0, \end{aligned}\right.$$

wo der erste Klammerausdruck in $\lambda_1 | \lambda_2$ vom Grade $m - 1$ ist. Nun ist doch $m = e - 1$; wäre daher

$$e^{(\varrho)}_\varkappa < e,$$

so wäre

$$e^{(\varrho)}_\varkappa \leqq e - 1 \leqq m,$$

und somit besässen wir in (17), wenn wir durch

$$\lambda_1^{e^{(\varrho)}_\varkappa}$$

rechts und links dividiren, eine Relation zwischen den Ableitungen der Schaar nach den Variabelen der ersten Reihe, welche in $\lambda_1 | \lambda_2$ nur vom Grade $m - 1$ wäre, gegen die Voraussetzung (53).

Damit ist nun die in 52 *aufgestellte Behauptung, dass sich eine jede singuläre Schaar von bilinearen Formen durch lineare Substitution auf die daselbst näher beschriebene Form (3) bringen lasse, vollständig bewiesen.*

58. Nun seien φ und ψ zwei ganz *beliebige bilineare Formen* von r Variabelen x_i und s Variabelen y_i, ferner sei $|\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi| \equiv 0$ und der Rang des Systems dieser Determinante τ. Alsdann bestimmen wir die Konstanten $g|h$, $g'|h'$ so, dass die Formen

$$\overline{\varphi} = g\varphi + h\psi, \quad \overline{\psi} = g'\varphi + h'\psi$$

die Eigenschaft haben, dass der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten τ^{ten} Grades des Systems von $|\lambda_1\overline{\varphi} + \lambda_2\overline{\psi}|$ nicht Null wird für $\lambda_2 = 0$ (37, 55); dabei wählen wir

$$gh' - g'h = 1.$$

Dann kann man aber nach den Entwickelungen in 52—57

$$g\varphi + h\psi = \sum_{\varkappa,\varrho} \Phi_\varkappa^{(\varrho)}, \quad g'\varphi + h'\psi = \sum_{\varkappa,\varrho} (c_\varrho \Phi_\varkappa^{(\varrho)} + \Psi_\varkappa^{(\varrho)})$$

setzen, wo die $X_{\varkappa\mu}^{(\varrho)}$ $(Y_{\varkappa\nu}^{(\varrho)})$ unabhängige lineare Formen der x_i (y_k) bedeuten. Hieraus aber folgt, wenn wir

setzen, sodass
$$h' - hc_\varrho = a_\varrho, \quad gc_\varrho - g' = b_\varrho$$
$$ga_\varrho + hb_\varrho = 1$$
wird,
$$\varphi = \sum_{\varkappa,\varrho} (a_\varrho \Phi_\varkappa^{(\varrho)} - h\Psi_\varkappa^{(\varrho)}), \quad \psi = \sum_{\varkappa,\varrho} (b_\varrho \Phi_\varkappa^{(\varrho)} + g\Psi_\varkappa^{(\varrho)}).$$

Wir können also durch lineare Substitutionen die gegebene singuläre Schaar $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$ in eine Schaar

$$(18) \qquad \lambda_1 \sum_{\varkappa,\varrho} (a_\varrho \Phi_\varkappa^{(\varrho)} - h\Psi_\varkappa^{(\varrho)}) + \lambda_2 \sum_{\varkappa,\varrho} (b_\varrho \Phi_\varkappa^{(\varrho)} + g\Psi_\varkappa^{(\varrho)})$$

transformiren, wo die $\Phi_\varkappa^{(\varrho)}$, $\Psi_\varkappa^{(\varrho)}$ die in 52 angegebene Bedeutung haben, und für ein gewisses ϱ diejenigen $X_{\varkappa\mu}^{(\varrho)}$ oder $Y_{\varkappa\nu}^{(\varrho)}$, deren zweiter unterer Index gleich $e_\varkappa^{(\varrho)} - 1$ ist, sowie das zugehörige c_ϱ in a_ϱ und b_ϱ Null zu setzen sind; es ist ferner $ga_\varrho + hb_\varrho = 1$.

Die Schaar (18) ist zerlegbar. Diejenigen Theile, deren Determinanten nicht identisch Null sind, sind irreducibel (48). Aber auch die Theile von der Gestalt

$$(19) \qquad \lambda_1(h'\Phi^0 - h\Psi^0) + \lambda_2(-g'\Phi^0 + g\Psi^0)$$

[vergl. (16)] sind irreducibele Schaaren. Denn der Rang des Koefficientensystems der Schaar (19) ist

$$e - 1 = m;$$

die Anzahl der Variabelen X, die in (19) auftreten, gleich $m+1$; dann sind bekanntlich die Ableitungen von (19) nach den X durch *eine* lineare Relation verbunden. ET besitzt das Koefficientensystem von (19) *keine*. Wäre nun (19) einer zerlegbaren Schaar $S^0 = S_1^0 + S_2^0$ äquivalent, so müssten deren Theile S_1^0, S_2^0 beide singulär sein, da

sonst das System von S^0 mindestens einen ET besässe, was nicht der Fall ist; es gäbe daher mindestens zwei unabhängige lineare Relationen zwischen den Ableitungen von S^0 und daher auch zwischen denen von (19) (S. 95—96). *Die Schaar* (18) *ist also eine reducirte.*

Die lineare Relation, durch welche die Ableitungen von (19) nach den X verknüpft sind, ist in $\lambda_1 \,|\, \lambda_2$ genau vom m^{ten} Grade; da aber die Anzahl der X gleich $m+1$ ist, so kann daher die Schaar (19) in eine äquivalente von der Gestalt $\lambda_1 \Phi^0 + \lambda_2 \Psi^0$ (56, Schluss) übergeführt werden; die hierzu nöthigen Transformationen lassen die übrigen Theile der Schaar (18) ungeändert. Fassen wir das erlangte Resultat zusammen!

Eine singuläre Schaar von bilinearen Formen kann in eine äquivalente reducirte Schaar von der Gestalt (18) übergeführt werden, wo die $\Phi_\varkappa^{(\varrho)}$, $\Psi_\varkappa^{(\varrho)}$ die in 52 *angegebene Bedeutung haben, und woselbst für ein gewisses ϱ die $X_{\varkappa\mu}^{(\varrho)}$ oder $Y_{\varkappa\nu}^{(\varrho)}$, deren zweiter unterer Index $e_\varkappa^{(\varrho)} - 1$ ist, sowie b_ϱ und h gleich Null, g und $a_\varrho = 1$ zu setzen sind.**

Nachdem wir so die Kronecker'sche *Reduktion einer singulären Schaar ausgeführt haben,* müssen wir uns mit der reducirten Schaar selbst genauer befassen.

59. Die reducirte Schaar (18) besteht aus elementaren Schaaren von *zweierlei Art;* die Schaaren *erster Art* sind von gleichvielen Variabelen X und Y abhängig; die elementaren Schaaren *zweiter Art* hingegen haben eine Variabele der einen Reihe mehr, als Variabelen der anderen Reihe, zerfallen also wieder in *zwei Abtheilungen;* in die *erste (zweite) Abtheilung* rechnen wir die Theilschaaren, die eine Variabele X (Y) mehr haben, als Variabele Y (X). Bezeichnet man die Anzahl der Variabelen X in diesen drei Fällen bez. mit e, e, $e-1$, so ist die Anzahl der Variabelen Y bez. e, $e-1$, e. Die Gesammtzahl der Variabelen X und Y ist in den drei Fällen bez. $2e$, $2e-1$, $2e-1$.

a) Für eine Theilschaar erster Art

$$\lambda_1 (a_\varrho \Phi_\varkappa^{(\varrho)} - h \Psi_\varkappa^{(\varrho)}) + \lambda_2 (b_\varrho \Phi_\varkappa^{(\varrho)} + g \Psi_\varkappa^{(\varrho)}) \tag{20}$$

ist die Determinante gleich

$$\pm (a_\varrho \lambda_1 + b_\varrho \lambda_2)^{e_\varkappa^{(\varrho)}} = \pm (a_\varrho \lambda_1 + b_\varrho \lambda_2)^{\frac{n_\varkappa^{(\varrho)}}{2}},$$

wenn wir die Gesammtzahl ihrer Variabelen mit $n_\varkappa^{(\varrho)}$ bezeichnen; sie hat *einen* ET $(a_\varrho \lambda_1 + b_\varrho \lambda_2)^{e_\varkappa^{(\varrho)}}$.

b) Die Determinante einer Schaar *zweiter Art* ist identisch Null; eine Schaar der *ersten Abteilung* ist von der Gestalt

* Wenn im Folgenden von der reducirten Schaar (18) gesprochen wird, so meinen wir stets die Schaar von der *hier* beschriebenen Gestalt.

(21) $\lambda_1 \sum X^0_{\varkappa\mu} Y^0_{\varkappa\nu} + \lambda_2 \sum X^0_{\varkappa,\mu-1} Y^0_{\varkappa\nu}$ $(\mu+\nu = e^0_\varkappa - 1,\ \mu = 1, 2 \ldots e^0_\varkappa - 1)$,

wo durch die übergesetzten Null angedeutet ist, dass hier $c_\varrho = 0$, u. s. w. gesetzt worden ist. Bezeichnen wir die Gesammtzahl der Variabelen in (21) mit n^0, so ist $n^0_\varkappa = 2e^0_\varkappa - 1$.

Die Ableitungen von (21) nach den $X^0_{\varkappa\mu}$ sind durch *eine* lineare Relation verknüpft, die in $\lambda_1 | \lambda_2$ genau vom Grade $e^0_\varkappa - 1$ ist; bezeichnen wir diesen Grad kurz mit $m_\varkappa$, so ist

(22) $$n^0_\varkappa = 2m_\varkappa + 1.$$

Analoges gilt für die Schaaren *zweiter Abtheilung;* dieselben sind von der Gestalt

(23) $\lambda_1 \sum \overline{X}^0_{\varkappa\mu} \overline{Y}^0_{\varkappa\nu} + \lambda_2 \sum \overline{X}^0_{\varkappa\mu} \overline{Y}^0_{\varkappa,\nu-1}$ $(\mu+\nu = \bar{e}^0_\varkappa - 1,\ \nu = 1, 2, \ldots \bar{e}^0_\varkappa - 1)$,

wo durch den horizontalen Strich über den $X^0_{\varkappa\mu}$, u. s. w. angedeutet ist, dass wir es mit einer Theilschaar der zweiten Abtheilung zu thun haben. Hier sind die Ableitungen nach den $\overline{Y}^0_{\varkappa\nu}$ durch eine lineare Relation verbunden, die in $\lambda_1 | \lambda_2$ genau vom Grade

$$\overline{m}^0_\varkappa = \bar{e}^0_\varkappa - 1$$

ist; ferner ist

(24) $$\overline{n}^0_\varkappa = 2\overline{m}_\varkappa + 1,$$

wo $\overline{n}^0_\varkappa$ die Gesammtzahl der Variabelen in (23) bedeutet.

Das Koefficientensystem von (21), ebenso das von (23), besitzt *keine Elementartheiler*. Ferner ist $e^0_\varkappa > 1$, $\bar{e}^0_\varkappa > 1$.

Die elementaren Schaaren erster Art sind durch die Zahl der in ihnen auftretenden Variabelen $n^{(\varrho)}_\varkappa = 2e^{(\varrho)}_\varkappa$ und die Konstanten a_ϱ, b_ϱ, g, h bestimmt; die Schaaren der zweiten Art hingegen sind durch die Zahl der in ihnen auftretenden Variabelen $n^0_\varkappa$ bez. $\overline{n}^0_\varkappa$ allein vollständig bestimmt, in Folge der Gleichungen (22) und (24) aber auch durch die Zahlen $m_\varkappa$ bez. $\overline{m}_\varkappa$.

60. Die Bedeutung der Konstanten $g | h$ für die Schaar $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$ ist bekannt (37, 55); auch diejenige der Konstanten a_ϱ, b_ϱ und der Zahlen $e^{(\varrho)}_\varkappa = \frac{n^{(\varrho)}_\varkappa}{2}$ ist leicht anzugeben. Jede Theilschaar (20) besitzt nämlich den einen ET $(a_\varrho\lambda_1 + b_\varrho\lambda_2)^{e^{(\varrho)}_\varkappa}$;

derselbe ist nach dem Theoreme VII in 38 auch ein ET des Koefficientensystems von (18) und mithin auch des von $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$. Da die Koefficientensysteme der Theilschaaren zweiter Art keine ET besitzen, so treten eben nach Theorem VII genau soviel Theilschaaren erster Art in (18) auf, als das Koefficientensystem von $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$ ET besitzt. *Jedem Elementartheiler* $(a_\varrho\lambda_1 + b_\varrho\lambda_2)^{e^{(\varrho)}_\varkappa}$ *des letzteren Systems entspricht also eine Theilschaar (20) erster Art.* Dadurch ist die Bedeutung der a_ϱ, b_ϱ, $e^{(\varrho)}_\varkappa$ für unsere Schaar vollständig

dargelegt. Bezeichnet man die ET des Systems von $\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi$ in irgend einer Reihenfolge mit

$$(a_1\lambda_1+b_1\lambda_2)^{e_1},\quad (a_2\lambda_1+b_2\lambda_2)^{e_2},\ldots(a_p\lambda_1+b_p\lambda_2)^{e_p},$$

so kann man, wie in 44, den aus elementaren Schaaren erster Art bestehenden Theil von (18) kürzer gleich

$$(25)\ \lambda_1\Big(\sum a_\sigma(X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma}-h\sum(X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma-1}\Big)+\lambda_2\Big(\sum b_\sigma(X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma}+g\sum(X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma-1}\Big)$$
$$\sigma=1,2,\ldots p$$

setzen; dabei sind die $a_\sigma\,|\,b_\sigma$ so zu bestimmen, dass $ga_\sigma+hb_\sigma=1$ ist. (58, 47.)

Somit bleibt uns nur noch die Aufgabe, die Bedeutung der Zahlen n_x^0 bez. m_x, e_x^0 und $\bar{n}_x^0$ bez. $\bar{m}_x$, $\bar{e}_x^0$ aufzudecken.

Es seien φ und ψ zwei bilineare Formen von je $2n$ Variabelen $x_1\ldots x_n$, $y_1\ldots y_n$; durch Verschwinden von Koefficienten kann es möglich sein, dass die Anzahl beider Reihen von Veränderlichen verschieden ist, dann ist natürlich $|\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi|\equiv 0$; aber auch im Falle wirklich gleichviel x_i und y_i in $\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi$ auftreten, wollen wir $|\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi|\equiv 0$ voraussetzen. Der Rang des Koefficientensystems der Schaar $\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi$ sei τ. Alsdann bestehen zwischen den n Ableitungen von $\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi$ nach den x_i, ebenso nach den y_i, genau $n-\tau$ unabhängige lineare Relationen, deren Koefficienten homogene Funktionen von $\lambda_1\,|\,\lambda_2$ sind. Wir denken uns nun diese $n-\tau$ Relationen beidemal so gewählt, dass sie in den $\lambda_1\,|\,\lambda_2$ von möglichst niederem Grade sind; wir bezeichnen diese Gradzahlen bez. mit

$$(26)\qquad \begin{cases} M_1,\ M_2,\ldots M_{n-\tau},\\ \overline{M}_1,\ \overline{M}_2,\ldots \overline{M}_{n-\tau}\end{cases}$$

und nennen sie die zur singulären Schaar gehörigen **Minimalgradzahlen**. Jede zur Schaar $\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi$ äquivalente Schaar besitzt dieselben Minimalgradzahlen, wie $\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi$, wie man mittelst des auf S. 95—96 Bemerkten höchst einfach beweist. Diese Zahlen kann man daher als *numerische Invarianten* der Schaar $\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi$ (des Formenpaares φ, ψ) bezeichnen. Die Zahlen M_i, ebenso die Zahlen $\overline{M}_i$ seien in (26) nach wachsender Grösse geordnet. Sind nun die ϱ ersten M_i und die σ ersten $\overline{M}_i$ Null, so können wir die Schaar zunächst in eine äquivalente überführen, in welch' letzterer nur noch $n-\varrho=r$ Veränderliche der ersten Reihe und nur noch $n-\sigma=s$ Variabele der zweiten Reihe auftreten (53). Diese Schaar verwandeln wir dann auf die oben beschriebene Weise in eine reducirte Schaar von der Gestalt (18) (vergl. 54—59). Als zur gegebenen Schaar $\lambda_1\varphi+\lambda_2\psi$ äquivalent, besitzt sie dieselben Minimalgradzahlen, wie jene Schaar.

Das Nullsein der ϱ ersten M_i und der σ ersten $\overline{M}_i$ dokumentirt sich in der reducirten Schaar dadurch, dass dieselbe nur noch von r Variabelen X und s Variabelen Y abhängt. Die übrigen Gradzahlen M_i und $\overline{M}_i$ sind grösser als Null.

Nun sei T_1 eine Theilschaar (21) zweiter Art erster Abtheilung, T eine Theilschaar (20) erster Art. Dann sind die Ableitungen von T_1 nach den in T_1 auftretenden $e_\varkappa^0$ Variabelen X durch eine lineare Gleichung $G = 0$ verknüpft, die in $\lambda_1 | \lambda_2$ vom Grade $e_\varkappa^0 - 1 = m_\varkappa$ ist. Die Ableitungen der Schaar $T_1 + T$ nach den in ihr auftretenden X sind durch dieselbe Gleichung $G = 0$ verknüpft. Denn in $T_1 + T$ treten $e_\varkappa^0 + e_\varkappa^{(\varrho)}$ Variabele X auf. Der Rang des Koefficientensystems von $T_1 + T$ ist $e_\varkappa^0 - 1 + e_\varkappa^{(\varrho)}$ (22, Satz d), also sind die Ableitungen von $T_1 + T$ nach den X in der That durch *eine* lineare Relation verbunden, nämlich durch die Relation $G = 0$. Analog zeigt man: Ist T_1 eine Schaar erster, T_2 eine Schaar zweiter Abtheilung der zweiten Art, sind die Ableitungen von T_1 nach den X durch eine Gleichung $G = 0$ verknüpft, so sind die Ableitungen von $T_1 + T_2$ nach den X durch die einzige Relation $G = 0$ verbunden. Endlich: Sind $T_1 + R_1$ zwei Theilschaaren zweiter Art erster Abtheilung, sind die Ableitungen von $T_1(R_1)$ nach den X durch die lineare Relation $G_1 = 0\,(G_2 = 0)$ verbunden, so sind die Ableitungen von $T_1 + R_1$ nach den X durch zwei Relationen, nämlich durch

$$G_1 = 0, \quad G_2 = 0$$

verbunden. Alle diese Relationen sind unter sich nicht linear abhängig. Aehnliches gilt für die Ableitungen nach den Y.

Hieraus schliesst man, dass in (18) so viele Theilschaaren zweiter Art auftreten, als es von Null verschiedene Zahlen M_i bez. $\overline{M}_i$ giebt, und zwar $n - \tau - \varrho = \varrho_1$ Theilschaaren von der ersten Abtheilung und $n - \tau - \sigma = \sigma_1$ Theilschaaren zweiter Abtheilung. Diese liefern gerade ϱ_1 lineare unabhängige Relationen zwischen den Ableitungen von (18) nach den X und σ_1 unabhängige lineare Relationen zwischen den Ableitungen von (18) nach den Y. Diese Relationen sind in $\lambda_1 | \lambda_2$ bez. vom Grade

$$m_\varkappa = e_\varkappa^0 - 1 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots \varrho_1),$$
$$\overline{m} = \overline{e}_\varkappa^0 - 1 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots \sigma_1).$$

Durch lineare Verknüpfung der ϱ_1 ersten oder der σ_1 zweiten Relationen kann aber kein neues System von ϱ_1 bez. σ_1 unabhängigen Relationen gefunden werden, die in $\lambda_1 | \lambda_2$ von niederem Grade wären, als vom Grade $m_1, \ldots m_{\varrho_1}$ bez. $\overline{m}_1, \ldots \overline{m}_{\sigma_1}$; *daher sind die Zahlen* $m_\varkappa$ *und* $\overline{m}_\varkappa$ *nichts anderes als die von Null verschiedenen Minimalgradzahlen* M_i *und* $\overline{M}_i$, d. h. es ist bei passender Bezeichnung

$$M_{\varrho+1} = m_{\varrho+1}, \ldots M_{n-\tau} = m_{n-\tau},$$
$$\overline{M}_{\sigma+1} = \overline{m}_{\sigma+1}, \ldots \overline{M}_{n-\tau} = \overline{m}_{n-\tau}.$$

Damit ist denn, da ja

(27) $$\begin{cases} m_\varkappa = e_\varkappa^0 - 1, & \overline{m}_\varkappa = \overline{e}_\varkappa^0 - 1, \\ n_\varkappa^0 = 2m_\varkappa + 1, & \overline{n}_\varkappa^0 = 2\overline{m}_\varkappa + 1 \end{cases}$$

ist, die Bedeutung der in (18) auftretenden Zahlen $m_\varkappa$, $\overline{m}_\varkappa$ u. s. w. vollständig dargelegt.

Wir schreiben jetzt für alle M_i bez. $\overline{M}_i$ wieder m_i bez. $\overline{m}_i$. *Es ist vortheilhaft, auch für* $\varkappa = 1, 2, \ldots \varrho$ bez. $\varkappa = 1, 2, \ldots \sigma$ *durch*

$$n_\varkappa^0 = 2m_\varkappa + 1, \quad \overline{n}_\varkappa^0 = 2\overline{m}_\varkappa + 1$$

Zahlen $n_\varkappa^0$ *und* $\overline{n}_\varkappa^0$ *einzuführen.* Nicht nur die $m_\varkappa$, $\overline{m}_\varkappa$, sondern auch die $n_\varkappa^0$, $\overline{n}_\varkappa^0$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots n - \tau)$ sind Invarianten der Formenschaar $\lambda_1\varphi \mp \lambda_2\psi$ (des Formenpaares φ, ψ). Da Kronecker im Wesentlichen mit diesen letzeren Invarianten arbeitet, so wollen wir sie als die Kronecker'schen Invarianten der Schaar (des Paares) bezeichnen. Das Auftreten einer Kronecker'schen Invariante 1 besagt, dass die Anzahl der Variabelen der einen Reihe durch lineare Substitution um Eins vermindert werden kann.

61. Wir wollen nun annehmen, dass für zwei Schaaren

$$\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi, \quad \lambda_1\varphi' + \lambda_2\psi'$$

bilinearer Formen von je $2n$ Veränderlichen x_i, y_k die Minimalgradzahlen und die ET der Koefficientensysteme übereinstimmen. Diese sind dann von gleichem Range τ und der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten τ^{ten} Grades aus beiden Systemen ist derselbe.. Man kann daher bei der Reduktion dieser Schaaren den Konstanten $g|h$ beidemal dieselben Werthe beilegen, dann wird die reducirte Form (18) von $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$ *identisch* mit der reducirten Form (18) von $\lambda_1\varphi' + \lambda_2\psi'$ (60). Die Schaaren $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$ und $\lambda_1\varphi' + \lambda_2\psi'$ sind also zu einer und derselben dritten Schaar (18) äquivalent, mithin sind die beiden Schaaren unter sich äquivalent. Es gilt also das Theorem von Kronecker:

X. Stimmen für zwei singuläre Formenschaaren, die von je n Variabelenpaaren abhängen, die Minimalgradzahlen und die Elementartheiler der Koefficientensysteme überein, so sind sie äquivalent, und umgekehrt.*

---

* Auf rationalem Wege kann man daher über die Aequivalenz zweier singulären Schaaren entscheiden; die Substitutionen, welche eine singuläre Schaar in eine äquivalente überführen, sind rational bestimmbar (39).

Nachdem wir dieses Resultat aus unseren Entwickelungen gezogen haben, müssen wir uns etwas eingehender mit den Zahlen m_x, $e_x^{(\varrho)}$, e_x^0 u. s. w. beschäftigen. Zunächst sei bemerkt, *dass nach (27) die* Kronecker'schen *Invarianten n_x, $\overline{n}_x$ stets ungerade Zahlen sind.* Ferner ergiebt sich aus dem in 59 und 60 Erörterten für die zu einer Schaar $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$, die von $2n$ Veränderlichen abhängt, gehörigen Zahlen $n_x^{(\varrho)}$, n_x^0, $\overline{n}_x^0$ die Gleichung

$$2n = \sum_\alpha n_\alpha^0 + \sum_\beta \overline{n}_\beta^0 + \sum_\gamma n_\gamma \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \dots n - \tau \\ \beta = 1, 2, \dots n - \tau \\ \gamma = 1, 2, \dots p \end{pmatrix},$$

wenn wir die früheren Bezeichnungen beibehalten und in $n_\gamma^{(\varrho)}$ den jetzt unnöthigen Index ϱ (S. 108) weglassen. Da $n_\gamma = 2e_\gamma$ ist, *so sind die Zahlen n_γ* gerade Zahlen.

Wir wollen die Theilschaaren (21), (23) und (25) bez. mit T_x^0, $\overline{T}_x^0$, T_σ bezeichnen. Besitzt eine singuläre Schaar $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$ bilinearer Formen von $2n$ Variabelen die Minimalgradzahlen

$$m_1, m_2, \dots m_t, \quad \overline{m}_1, \overline{m}_2, \dots \overline{m}_t$$

und das Koefficientensystem derselben die ET

$$(a_\sigma\lambda_1 + b_\sigma\lambda_2)^{e_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \dots p),$$

und wir setzen

(28) $$m_x = e_x^0 - 1, \quad \overline{m}_x = \overline{e}_x^0 - 1,$$

so kann man nach dem Vorhergehenden $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi$ in die Schaar

$$R = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=t} T_\alpha^0 + \sum_{\beta=1}^{\beta=t} \overline{T}_\beta^0 + \sum_{\gamma=1}^{\gamma=p} T_\gamma$$

transformiren, *wo in R bei* $e_\alpha^0 = 1$, $\overline{e}_\beta^0 = 1$,

$$T_\alpha^0 = \overline{T}_\beta^0 = 0$$

zu nehmen ist. Dabei ist, wenn wir noch

(29) $$n_x^0 = 2m_x + 1, \quad \overline{n}_x^0 = 2\overline{m}_x + 1, \quad n_x = 2e_x$$

setzen,

(30) $$n_1^0 + n_2^0 + \dots + n_t^0 + \overline{n}_1^0 + \overline{n}_2^0 + \dots + \overline{n}_t^0 + n_1 + n_2 + \dots + n_p = 2n;$$

die n_x^0, $\overline{n}_x^0$ sind ungerade, die n_x gerade Zahlen.

Man denke sich nun umgekehrt für ein gegebenes n die Gleichung (30) in positiven, ungeraden* Zahlen n_x^0, $\overline{n}_x^0$ und in positiven geraden Zahlen n_x gelöst; dabei müssen die Zahlen n_x^0 und $\overline{n}_x^0$ in gleicher Zahl auftreten und dürfen nicht fehlen, während die Zahlen n_x nicht unbedingt in einer Lösung aufzutreten brauchen. Ist dann durch die Zahlen

$$n_1^0, \dots n_t^0, \quad \overline{n}_1^0, \dots \overline{n}_t^0, \quad n_1, \dots n_p$$

* Von Null verschiedenen.

eine solche Lösung der Gleichung (30) gegeben, und man berechnet aus *diesen* Zahlen durch die Gleichungen (29) neue Zahlen

$$m_1, m_2, \dots m_t, \quad \overline{m}_1, \overline{m}_2, \dots \overline{m}_t, \quad e_1, e_2, \dots e_p,$$

setzt ferner für ein vorstehendes m_x, $\overline{m}_x$

$$m_x = e_x^0 - 1, \quad \overline{m}_x = \overline{e}_x^0 - 1$$

und wählt alsdann für die Zahlen e_x^0, $\overline{e}_x^0$, e_x in R *diese* Zahlen

$$e_1^0, e_2^0, \dots e_t^0, \quad \overline{e}_1^0, \overline{e}_2^0, \dots \overline{e}_t^0, \quad e_1, e_2, \dots e_p,$$

setzt für ein $e_\alpha^0 = 1$, $T_\alpha^0 = 0$, für ein $\overline{e}_\beta^0 = 1$, $\overline{T}_\beta^0 = 0$, wählt ferner in R die Konstanten a_σ, b_σ, g, h willkürlich, aber so, dass

$$g a_\sigma + h b_\sigma \gtrless 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots p)$$

ist, dann besitzt die Schaar R die Minimalgradzahlen

$$m_1, m_2, \dots m_t, \quad \overline{m}_1, \overline{m}_2, \dots \overline{m}_t,$$

und das Koefficientensystem von R besitzt die ET

$$(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \dots p).$$

Dies geht unmittelbar aus 60 hervor.

Wir wollen dieses Resultat folgendermassen kurz als Theorem aussprechen:

XI. Man kann für ein gegebenes n singuläre bilineare Formenschaaren, die von $2n$ Variabelen abhängen, bilden*, welche vorgeschriebene Minimalgradzahlen haben, und deren Koefficientensysteme vorgeschriebene Elementartheiler besitzen.

Sind die Zahlen m_x, $\overline{m}_x$ nicht alle grösser als Null, so treten in der, wie eben angegeben, zu bildenden Schaar nicht wirklich $2n$ Variabele auf; die Schaar kann ferner nur aus Theilschaaren erster Art bestehen, sodass ihr Koefficientensystem gar keine ET besitzt.

Fasst man eine ordinäre Schaar als eine solche auf, die keine Minimalgradzahlen besitzt, lässt ferner in den Theoremen X und XI das Wort „singulär" weg, *so gelten diese Theoreme X und XI für Formenschaaren jeder Art* (vergl. Theorem VIII und IX). Es herrscht also zwischen den Entwickelungen von Weierstrass und Kronecker vollkommene Einheitlichkeit. Dieselbe tritt auch im folgenden Satze hervor:

Die Kronecker'schen und Weierstrass'schen Invarianten einer zerlegbaren Schaar sind diejenigen ihrer Theile zusammengenommen.

* Oder, wie man auch sagen kann, welche vorgeschriebene Kronecker'sche Invarianten haben.

Für die Weierstrass'schen Invarianten ist der Satz bewiesen (Theorem VII in 38), für die Kronecker'schen beweist man ihn so: Sei die Schaar S in die Theile S_1 und S_2 zerlegbar, seien r_1, r_2, r bez. die Rangzahlen von $|S_1|$, $|S_2|$, $|S|$ und für

$$n_1 - r_1 = \tau_1, \quad n_2 - r_2 = \tau_2, \quad n - r = \tau$$

$$m_1, m_2, \ldots m_{\tau_1}, \quad m_{\tau_1+1}, \ldots m_{\tau_1+\tau_2}, \quad m'_1, m'_2, \ldots m'_\tau$$

die Minimalgradzahlen der ersten Reihe für die Schaaren S_1, S_2, S, die von n_1, n_2, n Variabelen x_i abhängen mögen. Zunächst erkennt man, dass wegen $r = r_1 + r_2$ (22, d) und $n = n_1 + n_2$

$$\tau_1 + \tau_2 = \tau$$

ist. Nach Kronecker giebt es ferner Substitutionen, die S_1, S_2, S bez. in

$$R_1 = T_1^0 + T_2^0 + \cdots + T_{\tau_1}^0 + K,$$

$$R_2 = T_{\tau_1+1}^0 + T_{\tau_1+2}^0 + \cdots + T_\tau^0 + L,$$

$$S' = T_1^0 + T_2^0 + \cdots + T_\tau^0 + K + L = R_1 + R_2$$

überführen (S. 111, vergl. auch 32). Sind nun a Zahlen $m_1, \ldots m_{\tau_1}$, b Zahlen $m_{\tau_1+1}, \ldots m_\tau$ Null, so hängt die Schaar S' nur von $n-(a+b)$ Variabelen der ersten Reihe ab, d. h. $a+b$ der Zahlen m'_i sind Null. Jede Theilschaar $T_\varkappa^0$ $(m_\varkappa > 0)$ aber von S' liefert eine Relation $m_\varkappa$ten Grades zwischen den Ableitungen von S' nach den Variabelen der ersten Reihe. Zwischen diesen bestehen also $\tau_1 + \tau_2 = \tau$ unabhängige Relationen, die bez. vom Grade $m_1, m_2, \ldots m_\tau$ sind. Durch lineare Verbindung dieser Relationen kann aber kein neues System von τ unabhängigen Relationen geschaffen werden, die von niedrigerem als vom Grade $m_1, m_2, \ldots m_\tau$ in $\lambda_1 | \lambda_2$ wären; daher müssen die Zahlen m'_i und m_i übereinstimmen. Analoges gilt für die Gradzahlen der zweiten Reihe, womit unser Satz bewiesen ist.

Man erkennt schliesslich, *dass eine singuläre Schaar dann und nur dann irreducibel ist, wenn sie ein einziges Kronecker'sches Invariantenpaar* n_1^0, $\bar{n}_1^0 - 1$, *ihr System aber keinen* ET *besitzt.*

62. Auf Grund des Theorems XI *klassificiren* wir die singulären Formenschaaren, die von gleichvielen Variabelenpaaren abhängen, unter Zugrundelegung unbeschränkter linearer Transformationen für die Variabelen beider Reihen genau so, wie dies bei den ordinären Schaaren auf Grund des Theorems IX in 49 ausgeführt wurde.

Gehören zu einer singulären Schaar $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ von bilinearen Formen, die von n Variabelenpaaren abhängen, etwa die unter (29) angegebenen Zahlen n_α^0, $\bar{n}_\beta^0$ u. s. w., so sagen wir, die Schaar $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ (das Formenpaar A, B) besitze die Charakteristik

(31) $[\{n_1^0, n_2^0, \ldots n_i^0; \bar{n}_1^0, \bar{n}_2^0, \ldots \bar{n}_i^0\} (n_1, \ldots) \ldots (n_\sigma, \ldots) \ldots (\ldots, n_\nu)],$*
wobei die runden Klammern solche Zahlen n_σ einschliessen, deren zugehörige Zahlen $e_\sigma = \frac{n_\sigma}{2}$ Exponenten von ETn *gleicher* Basis sind.

Zu allen von $2n$ Variabelen abhängigen singulären Formenschaaren gehört eine endliche Anzahl von Charakteristiken (31), da die Summe der Zahlen n_α^0, $\bar{n}_\beta^0$, n_γ gleich $2n$ ist, u. s. w., wie in 29, nur dass jetzt an Stelle der Gleichung (3) die Gleichung (30), an Stelle von Theorem IX das Theorem XI tritt. *Schliesslich klassificiren wir wieder, wie in* 49, *die von einer gegebenen Anzahl von Variabelenpaaren abhängigen singulären Schaaren.* Sind in der Charakteristik einer Klasse die Zahlen n_α^0 nicht alle gleich den Zahlen $\bar{n}_\beta^0$, so erhält man dadurch, dass man in ihr die Zahlen n_α und $\bar{n}_\beta^0$ vertauscht, nicht die Charakteristik einer neuen Klasse, da es gleichgiltig ist, welche Reihe von Variabelen man in einer bilinearen Form als die erste ansehen will. Die Schaaren einer und derselben Klasse können wegen Theorem X auf eine gewisse *Normalform (kanonische Form) R* gebracht werden.** U. s. w.

Die Zahl der Klassen von singulären Formenschaaren, die von n Variabelenpaaren abhängen, *die aber in solche transformirt werden können, die von weniger Variabelenpaaren abhängen*, ist gleich der Zahl der Klassen von *ordinären und singulären Schaaren* bilinearer Formen, die von $n-1$ Variabelenpaaren abhängen. Denn stellen die Zahlen

$$1, n_2^0, \ldots, \bar{1}, \bar{n}_2^0, \ldots 1\, n_1 + n_2 \ldots$$

ein Lösungssystem der Gleichung (30) vor, welches die S. 111 angegebenen Eigenschaften besitzt, so ist durch die Zahlen

$$n_2^0, \ldots, \bar{n}_2^{0\prime}, n_1, n_2, \ldots$$

ein geignetes Lösungssystem der Gleichung

(32) $$2(n-1) = \sum_\alpha n_\alpha^0 + \sum_\beta \bar{n}_\beta^0 + \sum_\gamma n_\gamma$$

gegeben. Genügen umgekehrt die Zahlen $n_2^0, \ldots, \bar{n}_2^0, \ldots n_1, n_2, \ldots$ der Gleichung (32) und besitzen die S. 111 angegebenen Eigenschaften, nur dass jetzt auch die Zahlen n_α^0, $\bar{n}_\beta^0$ fehlen dürfen, in welchem Falle

$$n_1 + n_2 + \cdots = 2(n-1),$$
$$e_1 + e_2 + \cdots = n - 1$$

ist, so stellen die Zahlen $1, n_2^0, \ldots, \bar{1}, \bar{n}_2^0, \ldots, n_1, n_2, \ldots$ ein passendes Lösungssystem von (30) vor.

---

* Treten keine Zahlen n_σ auf, so bleibt die eckige Klammer weg.

** Ist die Charakteristik einer Klasse von der Gestalt $\{11\ldots1; \bar{1}\,\bar{1}\ldots\bar{1}\}$, so verschwinden alle ihr angehörigen Schaaren identisch; wir wollen dann sagen, zur Klasse gehöre die Normalform „0".

Die Normalformen für die Klassen *dieser* singulären Formenschaaren, die von n Variabelenpaaren abhängen, sind identisch mit den Normalformen für alle Klassen von singulären und ordinären Formenschaaren, die von $(n-1)$ Variabelenpaaren abhängen. Denn zu der Klasse von Schaaren bilinearer, von n Variabelenpaaren abhängiger Formen mit der Charakteristik

(33) $$[\{1, n_2^0, \ldots; \overline{1}, \overline{n}_2^0, \ldots\}(n_1, \ldots) \ldots (n_\sigma, \ldots) \ldots (\ldots, n_p)]$$

gehört dieselbe Normalform, wie zu der Klasse von Schaaren bilinearer, von $n-1$ Variabelenpaaren abhängiger Formen mit der Charakteristik

$$[(n_2^0, \ldots; \overline{n}_2^0, \ldots)(n_1, \ldots) \ldots (n_\sigma, \ldots) \ldots (\ldots, n_p)]$$

bez., wenn die Zahlen $n_2^0, \ldots \overline{n}_2^0, \ldots$ in (33) fehlen, mit der Charakteristik

$$[(\tfrac{n_1}{2} - e_1, \ldots) \ldots (\tfrac{n_\sigma}{2} - e_\sigma, \ldots) \ldots (\ldots, \tfrac{n_p}{2} - e_p)].$$

Vergl. 49.

Diese Bemerkungen benützend, wollen wir jetzt für die Fälle $n = 1, 2, 3, 4$ die Zahl der Klassen bestimmen und die zu den einzelnen Klassen gehörigen Normalformen wirklich aufstellen.

Für $n = 1$ gestattet die Gleichung

$$2 = n_1^0 + \cdots + \overline{n}_1^0 + \cdots + n_1 + \cdots$$

nur eine Lösung der in 61 beschriebenen Art, nämlich die Lösung

$$n_1^0 = 1, \quad \overline{n}_1^0 = 1;$$

es giebt nur *eine* Klasse mit der Charakteristik

$$\{1, \overline{1}\};$$

sie umfasst die Schaaren bilinearer Formen von einem Variabelenpaare, die identisch Null sind.

Für $n = 2$ hat man für die Gleichung

$$4 = n_1^0 + n_2^0 + \cdots + \overline{n}_1^0 + \overline{n}_2^0 + \cdots + n_1 + n_2 + \cdots$$

die 3 Lösungen:

1. $n_1^0 = 3, \quad \overline{n}_1^0 = 1,$
2. $n_1^0 = 1, \quad \overline{n}_1^0 = 1, \quad n_1 = 2,$
3. $n_1^0 = n_2^0 = \overline{n}_1^0 = \overline{n}_2^0 = 1.$

Zu der der ersten entsprechenden Klasse mit der Charakteristik

$$\{3, \overline{1}\}$$

bestimmt sich die Normalform wie folgt; zunächst wird

$$m_1 = 1, \quad \overline{m}_1 = 0, \quad e_1^0 = 2;$$

daher ist $R = T_1^0$, wo in T_1^0

$$e_1^0 - 1 = 1$$

zu nehmen ist; man erhält daher als Normalform

$$\lambda_1 X_{11}^0 Y_{10}^0 + \lambda_2 X_{10}^0 Y_{10}^0.$$

Die Normalformen für die Klassen $[\{1, \bar{1}\}\, 2]$ und $\{11, \overline{11}\}$ sind diejenigen für die Klassen $[1]$ und $\{1, \bar{1}\}$ von Formenschaaren, die von *einem* Variabelenpaare abhängen; die Normalform für die ersteren wurde in 50 unter a), 1 angegeben, die Schaaren der zweiten sind identisch Null (siehe oben). U. s. w.

Wir stellen jetzt, wie in 50, die Charakteristiken und Normalformen für alle Klassen von Formenpaaren, die eine *singuläre Schaar* bilinearer Formen von n Variabelenpaaren bestimmen, für die Fälle $n = 1, 2, 3, 4$ zusammen, wobei wir für X, Y bez. x, y schreiben.

Klassen der singulären Paare bilinearer Formen von $2n$ Variabelen bei unbeschränkter linearer Transformation der Variabelen im Falle

a) $n = 1$.

1. $\{1, \bar{1}\} : \begin{matrix} 0, \\ 0. \end{matrix}$

b) $n = 2$.

1. $\{3, \bar{1}\} : \begin{matrix} x^0_{11}\, y^0_{10}, \\ x^0_{10}\, y^0_{10}. \end{matrix}$

2. $[\{1, \bar{1}\}\, 2]$, 3. $\{11, \overline{11}\}$: Die Normalformen sind identisch mit denjenigen für die Klassen von Formenpaaren, die von je *einem* Variabelenpaare abhängen (vergl. 50 a), 1, 62 a), 1).

c) $n = 3$.

1. $\{5, \bar{1}\} : \begin{matrix} x^0_{11}\, y^0_{11} + x^0_{12}\, y^0_{10}, \\ x^0_{10}\, y^0_{11} + x^0_{11}\, y^0_{10}. \end{matrix}$

2. $\{3, \bar{3}\} : \begin{matrix} x^0_{11}\, y^0_{10} + \bar{x}^0_{10}\, \bar{y}^0_{11}, \\ x^0_{10}\, y^0_{10} + \bar{x}^0_{10}\, \bar{y}^0_{10}.^* \end{matrix}$

3. $[\{3, \bar{1}\}\, 2] : \begin{matrix} x^0_{11}\, y^0_{10} + a_1\, x_{10}\, y_{10}, \\ x^0_{10}\, y^0_{10} + b_1\, x_{10}\, y_{10}. \end{matrix}$

4. $\{31, \overline{11}\}$
5. $[\{1, \bar{1}\}\, 22]$
6. $[\{1, \bar{1}\}\, (22)]$
7. $[\{1, \bar{1}\}\, 4]$
8. $[\{11, \overline{11}\}\, 2]$
9. $\{111, \overline{111}\}$

(zu 4–9:) Die Normalformen sind identisch mit denjenigen für die Klassen von Formenpaaren, die von je *zwei* Variabelenpaaren abhängen, und zwar stimmen die Normalformen für die linksstehenden Klassen 4 bis 9 der Reihe nach mit denjenigen für die Klassen mit den Charakteristiken $\{3, \bar{1}\}$, $[11]$, $[(11)]$, $[\{1, \bar{1}\}\, 2]$, $\{11, \overline{11}\}$ überein.

---

* Ueber die Charakterisirung dieses Falles durch rationale In- und Kovarianten zweier ternären bilinearen Formen vergl. Muth, Ueber ternäre bilineare Formen, Math. Ann. (92) Bd. 42, Art. 8.

d) $n = 4$.

$$1.\ \{7, \bar{1}\} : \begin{array}{l} x^0_{11} y^0_{12} + x^0_{12} y^0_{11} + x^0_{13} y^0_{10}, \\ x^0_{10} y^0_{12} + x^0_{11} y^0_{11} + x^0_{12} y^0_{10}. \end{array}$$

$$2.\ \{5, \bar{3}\} : \begin{array}{l} x^0_{11} y^0_{11} + x^0_{12} y^0_{10} + \bar{x}^0_{10} \bar{y}^0_{11}, \\ x^0_{10} y^0_{11} + x^0_{11} y^0_{10} + \bar{x}^0_{10} \bar{y}^0_{10}. \end{array}$$

$$3.\ \{33, \overline{11}\} : \begin{array}{l} x^0_{11} y^0_{10} + x^0_{21} y^0_{20}, \\ x^0_{10} y^0_{10} + x^0_{20} y^0_{20}. \end{array}$$

$$4.\ [\{5, \bar{1}\} 2] : \begin{array}{l} x^0_{11} y^0_{11} + x^0_{12} y^0_{10} + a_1 x_{10} y_{10}, \\ x^0_{10} y^0_{11} + x^0_{11} y^0_{10} + b_1 x_{10} y_{10}. \end{array}$$

$$5.\ [\{3, \bar{3}\} 2] : \begin{array}{l} x^0_{11} y^0_{10} + \bar{x}^0_{10} \bar{y}^0_{11} + a_1 x_{10} y_{10}, \\ x^0_{11} y^0_{10} + \bar{x}^0_{10} \bar{y}^0_{10} + b_1 x_{10} y_{10}. \end{array}$$

$$6.\ [\{3, \bar{1}\} 22] : \begin{array}{l} x^0_{11} y^0_{10} + a_1 x_{10} y_{10} + a_2 x_{20} y_{20}, \\ x^0_{10} y^0_{10} + b_1 x_{10} y_{10} + b_2 x_{20} y_{20}. \end{array}$$

$$7.\ [\{3, \bar{1}\} (22)] : \begin{array}{l} x^0_{11} y^0_{10} + a_1 (x_{10} y_{10} + x_{20} y_{20}), \\ x^0_{10} y^0_{10} + b_1 (x_{10} y_{10} + x_{20} y_{20}). \end{array}$$

$$8.\ [\{3, \bar{1}\} 4] : \begin{array}{l} x^0_{11} y^0_{10} + a_1 (x_{10} y_{11} + x_{11} y_{10}) - h\, x_{10} y_{10}, \\ x^0_{10} x^0_{10} + b_1 (x_{10} y_{11} + x_{11} y_{10}) + g\, x_{10} y_{10}. \end{array}$$

5. $\{51, \overline{11}\}$, 6. $\{31, \overline{31}\}$, 7. $[\{31, \overline{11}\} 2]$, 8. $[\{1, \bar{1}\} 222]$, 9. $[\{1, \bar{1}\} (22) 2]$, 10. $[\{1, \bar{1}\} (222)]$, 11. $[\{1, \bar{1}\} 42]$, 12. $[\{1, \bar{1}\} (42)]$, 13. $[\{1, \bar{1}\} 6]$, 14. $\{311, \overline{111}\}$, 15. $[\{11, \overline{11}\} 22]$, 16. $[\{11, \overline{11}\} (22)]$, 17. $[\{11, \overline{11}\} 4]$, 18. $[\{111, \overline{111}\} 2]$, 19. $\{1111, \overline{1111}\}$.

Die Normalformen für diese letzten 15 Klassen sind identisch mit denjenigen für die Klassen von Formenpaaren, die von je *drei* Veränderlichenpaaren abhängen, und zwar stimmen die Normalformen für die Klassen 5—19 der Reihe nach mit denjenigen für die Klassen mit den Charakteristiken $\{5, \bar{1}\}$, $\{3, \bar{3}\}$ u. s. w. überein.

Aus 50 und 62 ergiebt sich, dass in den Fällen $n = 1, 2, 3, 4$ bez. 2, 6, 15, 33 Klassen von Schaaren bilinearer Formen auftreten.

Die Theoreme von Weierstrass und Kronecker finden zahlreiche Anwendungen in den Untersuchungen über *specielle Formenschaaren*, auf welche wir in den folgenden Paragraphen eingehen; wir gelangen durch dieselben zu einer Reihe neuer Fundamentalsätze über ET.

§ 9. Symmetrische und alternirende Formen.

I.

63. Es sei

$$A = \sum a_{ik} x_i x_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

wobei

$$a_{ik} = a_{ki},$$

eine *quadratische Form* von n Variabelen $x_1, \ldots x_n$, deren Koefficienten die in 10 für die a_{ik} angegebene Beschaffenheit haben mögen. Die Determinante der Form A bezeichnen wir mit $|A|$; das System von $|A|$ ist ein *symmetrisches*. Die Begriffe *„ordinäre“*, *„singuläre“*, *„zerlegbare quadratische Form“* definiren wir, wie bei den bilinearen Formen in 10 und 22. Sind die a_{ik} lineare Formen zweier Veränderlichen $\lambda_1 | \lambda_2$, so stellt

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$$

eine Schaar quadratischer Formen vor (3, Schluss). Die Begriffe *„Aequivalenz zweier Schaaren“ (Paare)*, *„elementare Schaar“*, *„reducirte Schaar“* definiren wir, wie es bei Schaaren bilinearer Formen geschah (25, 39), nur dass jetzt an Stelle der Substitutionen für die Variabelen beider Reihen *eine einzige* lineare Substitution

$$(1) \qquad x_i = \alpha_{1i} x_1' + \alpha_{2i} x_2' + \alpha_{ni} x_n'$$

für die $x_1, x_2, \ldots x_n$ tritt. Ist die Schaar A eine singuläre, so sind die Ableitungen von A nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $n - \tau$ unabhängige lineare Relationen verbunden, wenn τ den Rang des Systems von $|A|$ bezeichnet. Wählt man diese Relationen so, dass sie in $\lambda_1 | \lambda_2$ von möglichst niederem Grade $m_1, m_2, \ldots m_{n-\tau}$ sind, so heissen $m_1, m_2, \ldots m_{n-\tau}$ die zur Schaar A gehörenden Minimalgradzahlen.

Dies vorausgeschickt sei nunmehr $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ eine Schaar quadratischer Formen von n Variabelen, und zwar sei

$$\left.\begin{matrix} A = \sum a_{ik} x_i x_k, & B = \sum b_{ik} x_i x_k \\ a_{ik} = a_{ki}, & b_{ik} = b_{ki} \end{matrix}\right\} (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Dann setzen wir, unter $y_1, y_2, \ldots y_n$ Variabele verstehend,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x_1} \cdot y_1 + \frac{\partial A}{\partial x_2} \cdot y_2 + \cdots + \frac{\partial A}{\partial x_n} \cdot y_n\right) = P_a,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B}{\partial x_1} \cdot y_1 + \frac{\partial B}{\partial x_2} \cdot y_2 + \cdots + \frac{\partial B}{\partial x_n} \cdot y_n\right) = P_b.$$

Die symmetrischen bilinearen Formen P_a und P_b (vergl. 11) heissen die Polarformen von A bez. B*. Für $x_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ geht P_a in A, P_b in B, also die Schaar $\lambda_1 P_a + \lambda_2 P_b$ von symmetrischen

* Ist $P_a = \Sigma a_{ik} x_i y_k$ eine symmetrische Form, so ist P_a die Polarform von $A = \Sigma a_{ik} x_i x_k$.

bilinearen, in die Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ von quadratischen Formen über; denn es ist

$$P_a = \sum a_{ik} x_i y_k, \quad P_b = \sum b_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \dots n).$$

Es ist ferner

$$(2) \qquad |\lambda_1 A + \lambda_2 B| = |\lambda_1 P_a + \lambda_2 P_b|.$$

Durch die Substitution (1) mit nicht verschwindender Determinante

$$\sum \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \dots \alpha_{nn} = \Delta$$

gehe nun A in A, B in B über. Setzen wir noch

$$\mathsf{A} = \sum a'_{ik} x'_i x'_k, \quad \mathsf{B} = \sum b'_{ik} x'_i x'_k \quad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

und

$$(3) \qquad y_i = \alpha_{1i} y'_1 + \alpha_{2i} y'_2 + \dots + \alpha_{ni} y'_n \quad (i = 1, 2, \dots n),$$

so geht bekanntlich durch die *congruenten Transformationen* (1) und (3) (vergl. 13) P_a in

$$P_\alpha = \sum a'_{ik} x'_i y'_k \quad (i, k = 1, 2, \dots n),$$

P_b in

$$P_\beta = \sum b'_{ik} x'_i y'_k \quad (i, k = 1, 2, \dots n),$$

also die Schaar

$$\lambda_1 P_a + \lambda_2 P_b$$

in die Schaar

$$\lambda_1 P_\alpha + \lambda_2 P_\beta$$

über. Auch das Umgekehrte ist richtig: Geht durch die congruenten Transformationen (1) und (3) P_a in P_α, so geht durch (1) A in A über, u. s. w. Nach 11 ist

$$|\lambda_1 P_\alpha + \lambda_2 P_\beta| = \Delta \cdot |\lambda_1 P_a + \lambda_2 P_b| \cdot \Delta,$$

also wegen (2)

$$|\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}| = \Delta^2 |\lambda_1 A + \lambda_2 B|.$$

Ueber die Aequivalenz von Schaaren quadratischer Formen gilt der Satz:

14) Sind zwei ordinäre (singuläre) Schaaren quadratischer Formen von je n Variabelen äquivalent, so stimmen die Elementartheiler ihrer Determinanten (ihrer Koefficientensysteme und ihre Minimalgradzahlen) überein.

Denn sind die Schaaren $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ und $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ äquivalent, so sind es auch die Schaaren $\lambda_1 P_a + \lambda_2 P_b$ und $\lambda_1 P_\alpha + \lambda_2 P_\beta$, also stimmen die ET der Determinanten $|\lambda_1 P_a + \lambda_2 P_b|$ und $|\lambda_1 P_\alpha + \lambda_2 P_\beta|$ bez. die ET der Systeme dieser Determinanten überein (39, Satz 12); wegen (2) gilt aber das Gleiche für die Schaaren $\lambda_1 A + \lambda_2 B$, $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$. Sind $m_1, m_2, \dots m_t$ die zur (singulären) Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ gehörigen Minimalgradzahlen, so gehören zur Schaar $\lambda_1 P_a + \lambda_2 P_b$ die Minimalgradzahlen

$$m_1, m_2, \dots m_t; \ \overline{m}_1, \overline{m}_2, \dots \overline{m}_t,$$

wo bei passender Bezeichnung

$$m_\varkappa = \overline{m}_\varkappa \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots t)$$

ist. Denn es ist

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial(\lambda_1 A + \lambda_2 B)}{\partial x_i} = \frac{\partial(\lambda_1 P_a + \lambda_2 P_b)}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

$$\frac{\partial(\lambda_1 P_a + \lambda_2 P_b)}{\partial x_i} = \frac{\partial(\lambda_1 P_a + \lambda_2 P_b)}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, \ldots n);$$

die zu $\lambda_1 P_a + \lambda_2 P_b$ äquivalente Schaar $\lambda_1 P_\alpha + \lambda_2 P_\beta$ besitzt ebenfalls die Minimalgradzahlen $m_1, \ldots, \overline{m}_1, \ldots$ ($m_i = \overline{m}_i$) nach Theorem X. Daraus folgt aber, dass die Schaar $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ die Minimalgradzahlen $m_1, m_2, \ldots m_t$ besitzt, w. z. b. w.

Wir wollen im Folgenden zunächst zeigen, dass die Uebereinstimmung der ET nicht nur die nothwendige, sondern auch die *hinreichende* Bedingung für die Aequivalenz zweier ordinärer Schaaren quadratischer Formen ist.

64. Um dieses zu beweisen, bedürfen wir folgenden *Hilfssatzes:* Sind die Koefficienten einer *symmetrischen* bilinearen Form

$$A = \sum a_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

ganze Zahlen oder ganze Funktionen einer oder mehrerer Veränderlichen, so kann man A durch eine Reihe von *congruenten* Elementartransformationen in eine Form

$$\mathsf{A} = \sum a'_{ik} x'_i y'_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

so transformiren, dass die Subdeterminanten

$$\mathsf{A}_\varrho = \sum \pm a'_{11} a'_{22} \ldots a'_{\varrho\varrho} \quad (\varrho = 1, 2, \ldots r)$$

des Systems von $|\mathsf{A}|$ *sämmtlich regulär* in Bezug auf einen Primtheiler p werden, wenn r den Rang von $|\mathsf{A}|$ bedeutet.*

Zum Beweise brauchen wir die Resultate des Artikels 7. Zunächst kann man nach dem dort Gezeigten durch congruente Elementartransformationen 2ter Art (vergl. 27, b) die Form A in eine solche transformiren, für welche die in 7 mit $A_\varrho, B_\varrho, C_\varrho$ bezeichneten Subdeterminanten ihres Koefficientensystems die daselbst unter 6) angegebenen Eigenschaften besitzen. Bezeichnen wir diese Form wieder mit $A = \sum a_{ik} x_i y_k$ und führen wir A durch die congruenten Elementartransformationen 3ter Art (27, c)

$$x_1 = x'_1,\ x_2 = x'_2, \ldots x_\varrho = x'_\varrho,\ x_{\varrho+1} = x'_{\varrho+1} - x_\varrho,\ x_{\varrho+2} = x'_{\varrho+2}, \ldots x_n = x'_n,$$
$$y_1 = y'_1,\ y_2 = y'_2, \ldots y_\varrho = y'_\varrho,\ y_{\varrho+1} = y'_{\varrho+1} - y_\varrho,\ y_{\varrho+2} = y'_{\varrho+2}, \ldots y_n = y'_n$$

in eine Form

* Frobenius, S. B. 1894, S. 37.

$$\mathsf{A} = \sum a'_{ik} x'_i y'_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

über, so geht die Determinante $|\mathsf{A}|$ aus der Determinante $|A|$ dadurch hervor, dass man in $|A|$ die $(\varrho + 1)^{\text{te}}$ Zeile von der ϱ^{ten} Zeile und dann die $(\varrho + 1)^{\text{te}}$ Spalte von der ϱ^{ten} Spalte (oder umgekehrt) abzieht (27). Alsdann wird aber

und $\mathsf{A}_1 = A_1, \quad \mathsf{A}_2 = A_2, \ldots \mathsf{A}_{\varrho-1} = A_{\varrho-1}, \quad \mathsf{A}_{\varrho+1} = A_{\varrho+1}, \quad \mathsf{A}_n = A_n$

(4) $$\mathsf{A}_\varrho = A_\varrho - 2B_\varrho + C_\varrho,$$

wenn A_ϱ u. s. w. für A bedeutet, was A_ϱ u. s. w. für A. Dies ergiebt sich einfach so, dass man A_ϱ zweimal in je zwei Determinanten zerlegt. Enthält nun der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades von $|A|$ den Primtheiler p zur Potenz l, dann steckt p in B_ϱ genau zur Potenz l, in A_ϱ und C_ϱ zu einer höheren; daher steckt p wegen (4) in A_ϱ genau zur Potenz l; d. h. A_ϱ ist eine reguläre Subdeterminante von $|\mathsf{A}|$. In $|\mathsf{A}|$ sind sonach die sämmtlichen Determinanten $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots \mathsf{A}_\varrho, \mathsf{A}_{\varrho+1}$ regulär. Durch weitere Anwendung von solchen einfachen congruenten Transformationen bringt man es schliesslich zu einer Form A, für welche die bei A mit $A_1, \ldots A_r$ bezeichneten Subdeterminanten alle regulär in Bezug auf p werden, w. z. b. w.

Machen wir noch durch congruente Reihenvertauschungen in $|\mathsf{A}|$ das erste Diagonalelement zum letzten, das zweite zum vorletzen u. s. w., so ergiebt sich, falls speciell A von der Gestalt

$$\lambda A - B,$$

wo A und B symmetrische bilineare, von λ unabhängige Formen vorstellen, und $r = n$ ist, *dass man durch congruente Transformationen mit ganzzahligen Substitutionskoefficienten* $\lambda A - B$ *so umformen kann, dass in der Determinante der neuen Form die S. 70 für* $|\lambda A - B|$ *mit* $S', S'', S''' \ldots S^{(n-1)}$ *bezeichneten Subdeterminanten sämmtlich regulär werden in Bezug auf einen bestimmten Linearfaktor von* $|\lambda A - B|$.

65. Wir wenden nun die Weierstrass'sche Reduktion in § 6 auf eine *Schaar symmetrischer bilinearer Formen* an. Alsdann wird in 40 $C = \lambda A - B$ eine *symmetrische* Form und wir können daher nach 64 diese Form durch *congruente*, von λ unabhängige Substitutionen so transformiren, dass in der Determinante der neuen Form die bei $|\lambda A - B|$ mit $S', S'' \ldots S^{(n-1)}$ bezeichneten Subdeterminanten in Bezug auf den Faktor $(\lambda - c)$ von $|\lambda A - B|$ alle regulär sind. Diese Form bezeichnen wir wieder mit $\lambda A - B$; sie ist ebenfalls *symmetrisch* (S. 29), so dass jetzt in § 6

$$S_{ik} = S_{ki}, \quad S_{ik}^{(\varkappa)} = S_{ki}^{(\varkappa)}$$

wird, was zur Folge hat, dass in den Gleichungen (7) und (8) $X^{(\varkappa)}$ und $Y^{(\varkappa)}$ *dieselben* Funktionen der u_i bez. v_i werden; dasselbe gilt von

$X_{\varkappa\mu}$ und $Y_{\varkappa\mu}$ in 42 und, da nun die Substitutionen (19) und (20) in 43 beide *congruente Transformationen* sind, auch von $X_{\varkappa\mu}$ und $Y_{\varkappa\mu}$ in 43, wobei besonders zu beachten ist, dass die $X_{\varkappa\mu}$ und $Y_{\varkappa\nu}$ in (23) von λ unabhängig sind, da das Gleiche von den congruenten Transformationen (19) und (20) gilt (64). Daher werden endlich in 45 $X_{\sigma\mu}$ und $Y_{\sigma\mu}$ *dieselben* Funktionen der x_i bez. y_i; *die Substitutionen (32) sowohl als (36) sind congruente Substitutionen*, wenn $X_{\sigma\mu}$ und $Y_{\sigma\mu}$ als zusammengehörige Variabele aus den beiden Reihen von Variabelen $X_{\sigma\mu}$ und $Y_{\sigma\nu}$ (44, Schluss) aufgefasst werden. *Es können daher durch congruente Transformationen* A und B bez. in A und B in (36), und, *wenn* A *und* B *beliebige symmetrische bilineare Formen sind,* A *und* B *in* A *und* B *in (45) transformirt werden, vorausgesetzt, dass* $|\lambda_1 A + \lambda_2 B| \mathrel{=\!\!|\!\!=} 0$ ist.

Nun sei $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ irgend eine ordinäre Schaar von quadratischen Formen, ferner seien

$$(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots m)$$

die sämmtlichen ET ihrer Determinante; alsdann hat die Determinante der Schaar von symmetrischen bilinearen Formen $\lambda_1 P_a + \lambda_2 P_b$ (Bezeichnung wie in 63) dieselben ET; daher können durch congruente Transformationen P_a und P_b auf die Form (45) in § 6 gebracht werden. Indem wir $x_i = y_i$, $X_{\sigma\mu} = Y_{\sigma\mu}$ setzen (63), erhalten wir somit den Satz*:

15) Sind A *und* B *zwei quadratische Formen von je* n *Variabelen* $x_1, \ldots x_n$, *ist die Determinante* $|\lambda_1 A + \lambda_2 B| \mathrel{=\!\!|\!\!=} 0$, *und sind*

$$(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots m)$$

ihre sämmtlichen Elementartheiler, so kann man durch eine lineare Substitution die Formen A *und* B *gleichzeitig bez. in*

$$(5) \qquad \begin{aligned} \mathsf{A} &= \sum a_\sigma (X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma} - h \sum (X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma - 1}, \\ \mathsf{B} &= \sum b_\sigma (X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma} + g \sum (X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma - 1}{}^{**} \end{aligned}$$

transformiren, wo $g \,|\, h$ *beliebig, aber so zu wählen sind, dass*

$$|gA + hB| \mathrel{=\!\!|\!\!=} 0$$

ist, und die Verhältnissgrössen $a_\sigma \,|\, b_\sigma$ *so zu bestimmen sind, dass*

$$a_\sigma g + b_\sigma h = 1$$

ist.

Dabei hängen die $X_{\sigma\mu}$ mit dem x_i nach (32) in § 6 durch lineare Gleichungen von der Form

$$(6) \qquad X_{\sigma\mu} = \frac{1}{\sqrt{C_\sigma}} \left(C_{1\sigma\mu} x_1 + C_{2\sigma\mu} x_2 + \cdots + C_{n\sigma\mu} x_n\right)$$

---

* Weierstrass, BM 1868, S. 332—334 (Ges. W. Bd. II, S. 39—41).

** Für $e_\sigma = 1$, ist $(X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma - 1}$ gleich Null zu setzen; dies ist im Folgd. stets zu beachten.

zusammen, *wo* C_σ *und die* $C_{\varrho\sigma\mu}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots n)$ *ganze Funktionen von* a_σ, b_σ *und den Koefficienten der Formen* A *und* B *bedeuten.*

Stimmen nun für zwei ordinäre Schaaren von quadratischen Formen die ET ihrer Determinanten überein, so sind beide Schaaren einer und derselben dritten Schaar (6) äquivalent; daher sind sie unter sich äquivalent. Also ist die am Schlusse von **63** ausgesprochene Behauptung bewiesen, und es gilt somit das Theorem:*

XII. Zwei ordinäre Schaaren quadratischer Formen von n Variabelen sind dann und nur dann äquivalent, wenn die Elementartheiler ihrer Determinanten übereinstimmen.

66. Die Schaar $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ in 48 (vergl. Theorem IX) besitzt, wie wir eben gesehen haben, symmetrische Grundformen; die ET ihrer Determinante sind

$$(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots m),$$

wenn wir die $a_\sigma | b_\sigma$, e_σ so wählen, wie in Theorem IX angegeben wurde. Lassen wir nun in $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$

$$X_{\sigma\mu} = Y_{\sigma\mu}$$

werden, so geht diese Schaar in eine Schaar von quadratischen Formen über, welche dieselbe Determinante hat, wie $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ (63); die Determinante dieser Schaar von quadratischen Formen hat also die ET

$$(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots m).$$

Also gilt das Theorem**

XIII. Wählt man in

$$\mathsf{A} = \sum a_\sigma (X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma} - h \sum (X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma - 1},$$
$$\mathsf{B} = \sum b_\sigma (X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma} + g \sum (X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma - 1}$$

die positiven ganzen Zahlen $e_1, \ldots e_m$ und die Konstanten $g | h$, $a_\sigma | b_\sigma$ beliebig aber so, dass bei gegebenem n

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_m = n,$$
$$g a_\sigma + h b_\sigma \neq 0$$

ist, so besitzt die Schaar $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ quadratischer Formen von n Variabelen $X_{\sigma\mu}$ die Elementartheiler

$$(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots m).$$

---

* Weierstrass, l. c. (vergl. auch Gundelfinger in Hesse's Raumgeometrie, Leipzig (76), Suppl. IV).

** Weierstrass, B M 1868, S. 335 (G. W. Bd. II, S. 41).

Die Schaar $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ ist zerlegbar, ihre Theile sind irreducibel (48, Schluss), sie ist eine *reducirte Schaar von quadratischen Formen.*

Hervorgehoben werde noch, dass allgemein *eine ordinäre Schaar quadratischer Formen eine elementare ist, wenn ihre Determinante einen einzigen ET besitzt.* (Vergl. die eben citirte Stelle.)

Aus den Theoremen XII und XIII folgert man den Satz (51):

Damit sich zwei quadratische Formen A und B von je n Variabelen durch dieselbe lineare Substitution auf die Gestalt

$$\mathsf{A} = a_1 X_1^2 + a_2 X_2^2 + \cdots + a_n X_n^2,$$
$$\mathsf{B} = b_1 X_1^2 + b_2 X_2^2 + \cdots + b_n X_n^2$$

bringen lassen, wo $a_\sigma \mid b_\sigma$ $(\sigma = 1, 2 \ldots n)$ *nicht gleichzeitig Null sind, ist nothwendig und hinreichend, dass die Determinante* $|\lambda_1 A + \lambda_2 B| \mathrel{\equiv\!\!\!\!\!/} 0$ *ist und nur lineare Elementartheiler besitzt.**

Wir definiren jetzt den Begriff „Charakteristik einer ordinären Schaar von quadratischen Formen" so, wie für ordinäre Schaaren bilinearer Formen in 49, und *klassificiren* die Schaaren (Paare) quadratischer Formen, die von einer gegebenen Anzahl Variabelen abhängen, bei unbeschränkter Transformation der Variabelen genau so, wie es a. a. O. geschah. Zu jeder Klasse von Formenschaaren gehört eine gewisse *Normalform,* auf welche alle Formenschaaren derselben gebracht werden können. Für die Fälle $n = 1, 2, 3, 4$ ist die Zahl der Klassen aus 50 bekannt, man erhält die zu den einzelnen Klassen gehörigen Normalformen, indem man daselbst $x_{\sigma\mu} = y_{\sigma\mu}$ setzt. Man hat daher folgendes Schema:

Klassen der ordinären Paare quadratischer Formen von n Variabelen bei unbeschränkter Transformation der Variabelen im Falle

a) $n = 1$.

1. $[1]$: $a_1 x_{10}^2,\quad b_1 x_{10}^2.$

b) $n = 2$.

1. $[11]$: $a_1 x_{10}^2 + a_2 x_{20}^2,\quad b_1 x_{10}^2 + b_2 x_{20}^2.$

2. $[(11)]$: $a_1 (x_{10}^2 + x_{20}^2),\quad b_1 (x_{10}^2 + x_{20}^2).$

3. $[2]$: $2 a_1 x_{10} x_{11} - h x_{10}^2,\quad 2 b_1 x_{10} x_{11} + g x_{10}^2.$

* Weierstrass, BM 1868, S. 335—336 (Ges. W. Bd. II, S. 41—42).

c) $n = 3$.

1. [111]: $a_1 x_{10}^2 + a_2 x_{20}^2 + a_3 x_{30}^2$,
$b_1 x_{10}^2 + b_2 x_{20}^2 + b_3 x_{30}^2$.

2. [1 (11)]: Normalform, wie c) 1, aber $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

3. [(111)]: „ „ c) 1, aber $a_1 = a_2 = a_3$,
$b_1 = b_2 = b_3$.

4. [21]; $2 a_1 x_{10} x_{11} + a_2 x_{20}^2 - h x_{10}^2$,
$2 b_1 x_{10} x_{11} + b_2 x_{20}^2 + g x_{20}^2$.

5. [(21)]: Normalform, wie vorstehend, aber $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

6. [3]: $a_1 (x_{10} x_{12} + x_{11}^2) - h x_{10} x_{11}$,
$b_1 (x_{10} x_{12} + x_{11}^2) + g x_{10} x_{11}$.

U. s. w.*

67. Sind zwei *ordinäre* symmetrische Formenschaaren $\lambda_1 A + \lambda_2 B$, $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ äquivalent, so stimmen die ET ihrer Determinanten überein (Theorem VIII), und sie sind daher stets auch congruent in dem Sinne, dass die eine in die andere durch congruente von $\lambda_1 | \lambda_2$ unabhängige Substitutionen übergeführt werden kann (65). Dieses wichtige Ergebniss der Untersuchungen von Weierstrass gilt aber auch, wie Kronecker** gezeigt hat, für *singuläre* symmetrische Formenschaaren, d. h., sind zwei solche Schaaren äquivalent, also die Bedingungen des Theorems X erfüllt, dann sind sie auch im angegebenen Sinne congruent. Dass die für die Aequivalenz im weiteren Sinne nothwendigen Bedingungen auch für diese engere Art der Aequivalenz zweier ordinären oder singulären Schaaren von symmetrischen bilinearen Formen *nothwendig* sind, ist ja selbstverständlich, „dass sie aber auch *hinreichend* sind, ist von vornherein nicht zu erwarten und ist", wie Frobenius mit Recht bemerkt,*** „eines der interessantesten Ergebnisse jener Untersuchungen von Weierstrass und Kronecker". Den inneren Grund dieser Erscheinung hat Frobenius aufgedeckt in seiner für die congruenten Transformationen fundamentalen Arbeit: Ueber die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen.† Indem wir nachstehend seine ebenso einfachen, als eleganten Ausführungen wiedergeben, erlangen wir zugleich das Mittel, die langwierigen und ermüdenden

* Killing, Der Flächenbüschel II. O., Inaug.-Diss., Berlin 1872. Die Normalformen für den Fall $n = 4$ findet man auch bei Gundelfinger, Hesse's Raumgeometrie, 3. Aufl. (76) Suppl. IV.

** SB 1890, S. 1375 flg.; 1891, S. 9 flg. und S. 33 flg.

*** SB 1896, S. 8.

† SB 1896, S. 7 flg.

Kronecker'schen Entwickelungen* vollständig zu umgehen; wir bedienen uns dabei der in § 2 gebrachten symbolischen Rechnung mit Formen.

Die symmetrische bilineare Form von $2n$ Variabelen A gehe durch die Substitutionen P, Q in die symmetrische Form B über; es sei also symbolisch (11)

(7) $$B = PAQ.$$

Bildet man hier rechts und links die conjugirten Formen, so kommt (11, 5)

$$B = Q'AP',$$

da $B' = B$, $A' = A$ vorausgesetzt wurde. Es ist also

$$PAQ = Q'AP',$$

woraus

$$(Q'^{-1}P)A = A(P'Q^{-1})$$

folgt (12).

Setzen wir nun

$$Q'^{-1}P = U, \quad P'Q^{-1} = U',$$

so haben wir die Gleichungen

$$UA = AU',$$
$$U^2A = (UA)U' = (AU')U' = AU'^2,$$

allgemein also, wenn k eine ganze, positive Zahl,

$$U^kA = AU'^k;$$

daraus folgt, dass für eine beliebige ganze Funktion $\chi(U)$ von U (11, 4)

(8) $$\chi(U)A = A\chi(U')$$

ist. Wir wollen die Form $\chi(U)$ so gewählt denken, dass

$$|\chi(U)| \neq 0$$

ist. Dann folgt aus (8)

$$A = \chi(U)^{-1}A\chi(U'),$$

so dass wegen (7)

$$B = P\chi(U)^{-1}A\chi(U)Q$$

oder, wenn wir

$$P\chi(U)^{-1} = S, \quad \chi(U')Q = R$$

setzen,

$$B = SAR$$

wird. Damit nun S und R congruente Substitutionen seien, haben sie die Bedingung $S = R'$ zu erfüllen (13), d. h. es muss

* Nicht nur die a. zuletzt c. O., sondern auch diejenigen in BM 1874, S. 397—447 (G. W. Bd. I, S. 424—458). Vergl. § 10.

$$P\chi(U)^{-1} = [\chi(U')Q]' = Q'\chi(U),$$

also

$$P = Q'\chi(U)^2, \quad Q'^{-1}P = \chi(U)^2 = U,$$

$$\chi(U) = \sqrt{U}$$

sein (19). Denken wir umgekehrt unter den Quadratwurzeln aus U* eine bestimmte ausgewählt und bezeichnen diese ganze Funktion von U vorübergehend mit V. Unter den Wurzeln von U' ist dann sicher eine, die gleich V' ist (19), so dass wir, wenn wir unter $\sqrt{U'}$ gerade diese ganze Funktion von U' verstehen,

$$\sqrt{U'} = V'$$

oder

$$V' = (P'Q^{-1})^{\frac{1}{2}}$$

setzen dürfen. Dann wird aber für $R = V'Q$ oder

$$R = (P'Q^{-1})^{\frac{1}{2}}Q,$$

(9) $$R'AR = Q'VAV'Q.$$

Nun gilt aber die Gleichung (8) für jede ganze Funktion von U, insbesondere also auch für V, d. h. es ist

$$VA = AV';$$

dadurch geht (9) in

$$R'AR = Q'AV'^2Q = Q'AU'Q$$

über, da $V'^2 = U'$ ist. Daher wird

$$R'AR = Q'AP'Q^{-1}Q = Q'AP' = B,$$

$$B = R'AR;$$

nun ist aber $|R| = |V'|\cdot|Q| = \pm|U'|^{\frac{1}{2}}\cdot|Q|$ nach Gleich. (35) in 20 oder es ist

$$|R| = \pm|B|^{\frac{1}{2}}\cdot|Q|^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{|P|\cdot|Q|} \gtrless 0,$$

d. h.

16) Kann man eine symmetrische Form A in eine ebensolche Form B durch irgend zwei Substitutionen P, Q, deren Moduln nicht Null sind, transformiren, dann kann man stets auch congruente Substitutionen R', R mit nicht verschwindenden Determinanten angeben, welche A in B überführen.

Das Interessante dabei ist, dass R von den Substitutionen P und Q *allein* abhängt, nicht aber von A oder B. Sind daher $A_1, A_2, A_3, \dots$ mehrere symmetrische Formen derart, dass

---

* Es ist $|U| = |Q'^{-1}|\cdot|P| = \frac{|P|}{|Q'|} = \frac{|P|}{|Q|}$ weder Null noch unendlich.

$$PA_1Q, \quad PA_2Q, \quad PA_3Q, \ldots$$

ebenfalls symmetrische Formen sind, so ist

$$PA_1Q = R'A_1R, \quad PA_2Q = R'A_2R, \quad PA_3Q = R'A_3R, \ldots$$

und somit für beliebige $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$

$$P(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \cdots)Q = R'(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \cdots)R.$$

Insbesondere hat man für Formenschaaren den Satz:

17) Sind zwei Schaaren von symmetrischen bilineare Formen äquivalent, so sind sie stets auch — im oben angegebenen Sinne — congruent.

Damit ist das Weierstrass'sche Resultat auf einem zweiten Wege und das Kronecker'sche neu hinzu gewonnen.

Um die congruenten Transformationen zu finden, welche eine ordinäre Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ von symmetrischen bilinearen Formen in eine äquivalente ebensolche Schaar $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ überführen, mussten bei Weierstrass von vornherein die ET, also Irrationalitäten, eingeführt werden (§ 6 u. 65). Bei der eben geschilderten Methode von Frobenius liegt die Sache anders. Man kann nämlich zunächst auf *rationalem Wege* aus den Koefficienten der Grundformen der äquivalenten Schaaren $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ und $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ Substitutionen P, Q berechnen, welche A in A, B in B überführen (39); aus diesen Substitutionen werden dann, wie vorstehend beschrieben, congruente Substitutionen R', R berechnet. Bei der Bestimmung von R muss eine algebraische Gleichung gelöst werden (18, 19), es sind also auch hier naturgemäss Irrationalitäten unvermeidlich, aber der besondere Vortheil der hier entwickelten Methode besteht darin, dass diese unumgänglichen irrationalen Operationen erst am Schlusse der ganzen Rechnung auszuführen sind.*

Aus Theorem VIII in Verbindung mit dem Satze 17) folgert man direkt — ohne eine reducirte Schaar zu Hilfe zu nehmen — das Theorem XII. (Vergl. den Beweisgang in 65.)

Nunmehr soll der Satz 17 für die singulären Schaaren quadratischer Formen in Anwendung kommen.

68. Wir denken uns nun bei der Reduktion einer singulären Schaar in § 8 eine *symmetrische* Schaar $\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \psi$ zu Grunde gelegt. Der Rang ihrer Determinante sei wieder τ. Die $n - \tau$ Minimalgradzahlen m_i stimmen mit den $n - \tau$ Minimalgradzahlen $\overline{m}_i$ überein (63). Jeder elementaren Schaar (21) in der reducirten Schaar ist daher eine elementare Schaar (23) zugeordnet, wenn wir $m_\varkappa = \overline{m}_\varkappa$, also $e_\varkappa^0 = \bar{e}_\varkappa^0$ nehmen. Betrachten wir zwei derart zusammengehörige Theilschaaren

* Frobenius, l. c. S. 9.

zweiter Art, so haben dieselben, wenn wir den Index $\varkappa$ als momentan überflüssig weglassen, und $m_\varkappa$ für $e_\varkappa^0 - 1 = \bar{e}_\varkappa^0 - 1$ schreiben, die Gestalt

$$\lambda_1(X_1^0 Y_{m-1}^0 + X_2^0 Y_{m-2}^0 + \cdots + X_m^0 Y_0^0) + \lambda_2(X_0^0 Y_{m-1}^0 + X_1^0 Y_{m-2}^0 + \cdots\cdots + X_{m-1}^0 Y_0^0),$$
$$\lambda_1(\overline{X}_0^0 \overline{Y}_m^0 + \overline{X}_1^0 \overline{Y}_{m-1}^0 + \cdots + \overline{X}_{m-1}^0 \overline{Y}_1^0) + \lambda_2(\overline{X}_0^0 \overline{Y}_{m-1}^0 + \overline{X}_1^0 \overline{Y}_{m-2}^0 + \cdots + \overline{X}_{m-1}^0 \overline{Y}_0^0).$$

Wir betrachten nun die Summe dieser beiden Schaaren; sie ist von $2m + 1$ Variabelen X und ebensoviel Variabelen Y abhängig; ihr Koefficientensystem ist vom Range $2m$ (22, Satz d, 59) und besitzt keine ET (Theorem VII, 59). Diese Summe bleibt ferner *ungeändert*, wenn man die im Folgenden unter einander stehenden Variabelen

$$X_0^0, \ldots X_m^0, \quad \overline{X}_0^0, \ldots \overline{X}_m^0,$$
$$\overline{Y}_0^0, \ldots \overline{Y}_m^0, \quad Y_0^0, \ldots Y_m^0$$

vertauscht. Analoges gilt für je zwei andere zusammengehörige Theilschaaren zweiter Art. Die Theilschaaren (25) erster Art aber bleiben bez. ungeändert, wenn man $X_{\sigma\mu}$ und $Y_{\sigma\mu}$ vertauscht. *Es wird also die reducirte Schaar symmetrisch,* wobei $X_{\varkappa\mu}^0$ und $\overline{Y}_{\varkappa\mu}^0$, $\overline{X}_{\varkappa\mu}^0$ und $Y_{\varkappa\mu}^0$, $X_{\sigma\mu}$ und $Y_{\sigma\mu}$ bez. als zusammengehörige Variabele zu betrachten sind. *Nach unserem Satze 17) kann man also die singuläre symmetrische Schaar in ihre reducirte Schaar durch congruente von $\lambda_1 \mid \lambda_2$ unabhängige Substitutionen überführen,* deren Moduln nicht Null sind.

Da hier ferner $m = \overline{m}_i$, also $n_i^0 = \overline{n}_i^0$ ist (S. 110), so ergiebt sich wegen $n_\sigma = 2e_\sigma$ die Gleichung (30) als

$$2\sum_{i=1}^{i=t} n_i^0 + 2\sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} e_\sigma = 2n$$

oder

(10) $$n_1^0 + n_2^0 + \cdots + n_t^0 + e_1 + e_2 + \cdots + e_p = n,$$

wo $t = n - r$.

69. Es sei jetzt eine singuläre Schaar quadratischer Formen $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ von n Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gegeben, r der Rang ihrer Determinante, $n - r = t$; $m_1, m_2, \ldots m_t$ seien die Minimalgradzahlen dieser Schaar und

$$(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots p)$$

die ET ihres Koefficientensystems. Alsdann besitzt, wenn, wie in 63, P_a die Polarform von A u. s. w., die singuläre *symmetrische* Schaar $\lambda_1 P_a + \lambda_2 P_b$ von bilinearen Formen die Minimalgradzahlen

$$m_1, m_2, \ldots m_t, \quad \overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots \overline{m}_t$$

und ihr Koefficientensystem die eben aufgeführten ET (S. 119—120); die Kronecker'sche reducirte Schaar ist dann ebenfalls symmetrisch, und man kann $\lambda_1 P_a + \lambda_2 P_b$ in dieselbe durch congruente Transformationen

R', R für die x_i bez. y_i überführen, die so beschaffen sind, dass die $X^0_{\varkappa\mu}$, $\overline{X}^0_{\varkappa\mu}$, $X_{\sigma\mu}$ bez. dieselben Funktionen der x_i, wie die $\overline{Y}^0_{\varkappa\mu}$, $Y^0_{\varkappa\mu}$, $Y_{\sigma\mu}$ der y_i werden (68). Lassen wir jetzt y_i mit x_i $(i=1, 2, \ldots n)$ zusammenfallen, so stimmt jedes Y mit dem entsprechenden X überein, P_a geht in A, P_b geht in B und die reducirte Schaar in eine Schaar von *quadratischen* Formen der Variabelen X über, die wir mit $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ bezeichnen wollen. Die gegebene Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ von quadratischen Formen kann also durch eine lineare, von $\lambda_1 | \lambda_2$ unabhängige Substitution R' in diese Schaar $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B}$ transformirt werden, deren Gestalt wir uns jetzt näher betrachten wollen.

Lassen wir in der angegebenen Weise die Y mit den X zusammenfallen, so erhält man aus einer Theilschaar (20) in 59 eine Schaar *erster Art*

$$(11) \quad \begin{cases} T_\sigma = \lambda_1 \left(\sum a_\sigma (X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma} - h \sum (X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma - 1}\right) \\ \quad + \lambda_2 \left(\sum b_\sigma (X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma} + g \sum (X_\sigma X_\sigma)_{e_\sigma - 1}\right); \end{cases}$$

die Konstanten $g | h$ sind willkürlich, aber so gewählt, dass der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten τ^{ten} Grades von $|\lambda_1 A + \lambda_2 B|$ nicht Null wird für $\lambda_1 = g$, $\lambda_2 = h$, die Verhältnissgrössen $a_\sigma | b_\sigma$ so bestimmt, dass
$$a_\sigma g + b_\sigma h = 1$$
ist.

Die Theilschaaren zweiter Art ziehen sich paarweise zu Schaaren *zweiter Art*

$$T^0_\varkappa = \lambda_1 (X^0_{\varkappa 1} \overline{X}^0_{\varkappa, m_\varkappa - 1} + \cdots + X^0_{\varkappa, m_\varkappa} \overline{X}^0_{\varkappa 0} + \overline{X}^0_{\varkappa 0} X^0_{\varkappa, m_\varkappa} + \cdots + \overline{X}^0_{\varkappa, m_\varkappa - 1} X^0_{\varkappa 1})$$
$$+ \lambda_2 (X^0_{\varkappa 0} \overline{X}^0_{\varkappa, m_\varkappa - 1} + \cdots + X^0_{\varkappa, m_\varkappa - 1} \overline{X}^0_{\varkappa 0} + \overline{X}^0_{\varkappa 0} X^0_{\varkappa, m_\varkappa - 1} + \cdots + \overline{X}^0_{\varkappa, m_\varkappa - 1} X^0_{\varkappa 0})$$

oder

$$(12) \quad T^0_\varkappa = \lambda_1 \sum 2 X^0_{\varkappa\mu} \overline{X}^0_{\varkappa\nu} + \lambda_2 \sum 2 X^0_{\varkappa, \mu - 1} \overline{X}^0_{\varkappa\nu} \quad (\mu = 1, 2, \ldots m_\varkappa;\ \mu + \nu = m_\varkappa)$$

zusammen (vergl. 68); $m_\varkappa$ ist grösser als Null.

Fassen wir die seitherigen Ergebnisse kurz zusammen:

Sind $m_1, m_2, \ldots m_t$ die zu einer singulären Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ von quadratischen Formen von n Variabelen gehörigen Minimalgradzahlen, sind ferner
$$(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots p)$$
die sämmtlichen Elementartheiler ihres Koefficientensystems, so kann man dieselbe in eine äquivalente Schaar

$$(13) \qquad R = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=t} T^0_\varkappa + \sum_{\sigma=1}^{\sigma=p} T_\sigma$$

umformen, wo für $m_\varkappa = 0$, $T^0_\varkappa = 0$ zu setzen ist, wo ferner die Konstanten $g | h$ willkürlich, aber so gewählt sind, dass der grösste

gemeinsame Theiler aller Determinanten $(n - t = \tau)^{\text{ten}}$ Grades des Koefficientensystems von $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ für

$$\lambda_1 = g, \quad \lambda_2 = h$$

nicht Null wird, und die Verhältnissgrössen $a_\sigma | b_\sigma$ der Gleichung

$$a_\sigma g + b_\sigma h = 1 \quad (\sigma = 1, 2, \ldots p)$$

entsprechend gewählt sind.*

Da die Schaar $\lambda_1 P_a + \lambda_2 P_b$ die Minimalgradzahlen

$$m_1, \ldots m_t, \ \overline{m}_1, \ldots \overline{m}_t,$$

wo $m_\varkappa = \overline{m}_\varkappa$, besitzt und ihr Koefficientensystem dieselben ET, wie das der Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ (63), so besteht nach Gleichung (10) in 68, wenn wir

(14) $$n_\varkappa^0 = 2m_\varkappa + 1 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots t)$$

setzen, die *Gleichung*

(15) $$n_1^0 + n_2^0 + \cdots + n_t^0 + e_1 + e_2 + \cdots + e_p = n.^{**}$$

Wir bezeichnen die durch (14) definirten ungeraden Zahlen als die Kronecker'schen Invarianten der singulären Schaar von quadratischen Formen $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ (des Formenpaares A, B); den Klammerausdruck

$$[\{n_1^0, n_2^0, \ldots n_t^0\} \quad (e_1, \ldots) \ldots (e_\sigma, \ldots)]$$

(vergl. 62) nennen wir die Charakteristik der singulären Schaar quadratischer Formen $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ (des singulären Formenpaares A, B). Eine singuläre Schaar quadratischer Formen *ist dann und nur dann irreducibel, wenn sie eine einzige Kronecker'sche Invariante, ihr Koefficientensystem aber keinen ET besitzt.*

Das Auftreten von α Kronecker'schen Invarianten $n = 1$ besagt, dass die Schaar R nur von $n - \alpha$ Variabelen X abhängt; eine Schaar $T_\varkappa^0$ in R hängt von $n_\varkappa^0$ Variabelen X ab (68), eine Schaar T_σ von e_σ; hieraus erschliesst man direckt die Richtigkeit der Gleichung (15).

Tritt bei geradem n nur *eine* Zahl n_1^0 auf, so kann diese höchstens gleich $n - 1$ sein, und es tritt dann noch ein ET auf; man hat

$$n_1^0 = n - 1 = 2m_1' + 1,$$

$$m_1 = \frac{n-2}{2}.$$

Tritt bei ungeradem n nur *eine* Zahl n_1^0, auf, so ist diese höchstens gleich n, in welchem Falle kein ET auftritt; man hat dann

$$n_1^0 = n = 2m_1 + 1,$$

$$m_1 = \frac{n-1}{2}.$$

* Kronecker, SB 1891, S. 34—35.

** Kronecker, l. c. S. 41.

Eine Theilschaar $T_\varkappa^0$ zweiter Art der zerlegbaren Schaar R ist von $2m_\varkappa + 1$ Variabelen X abhängig, ihr Rang ist $2m_\varkappa$, also sind die Ableitungen derselben nach den X durch *eine* Gleichung verknüpft, die in $\lambda_1 | \lambda_2$ vom Grade $m_\varkappa$ ist; ET besitzt das Koefficientensystem von $T_\varkappa^0$ *keine*. Dieses entnimmt man unmittelbar aus 59, wenn man vorher zur Polarform von $T_\varkappa^0$ übergeht. Die Schaar $T_\varkappa^0$ ist mithin eine elementare Schaar; das Gleiche gilt von jeder Theilschaar T_σ in R (48, Schluss). *Also ist R eine reducirte Schaar von quadratischen Formen.*

70. Stimmen für zwei singuläre Schaaren von quadratischen Formen, die von je n Variabelen abhängen, die Minimalgradzahlen $m_1, m_2, \dots m_t$ und die ET $(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma}$ $(\sigma = 1, 2, \dots p)$ ihrer Koefficientensysteme überein, so sind dieselben zu einer und derselben reducirten Schaar R äquivalent (69), mithin auch unter sich. Also:

XIV. Zwei von gleichvielen Variabelen abhängige singuläre Schaaren von quadratischen Formen sind dann und nur dann äquivalent, wenn die Minimalgradzahlen derselben und die Elementartheiler ihrer Koefficientensysteme übereinstimmen.*

Wählt man bei der Bildung einer singulären, von n Variabelenpaaren abhängigen Schaar, welche vorgeschriebene Invarianten

$$n_\varkappa^0, \; \overline{n}_\varkappa^0, \; (a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma}$$

besitzt (S. 111—112), die Zahlen $n_\varkappa^0$ und $\overline{n}_\varkappa^0$ *so, dass*

$$n_\varkappa^0 = \overline{n}_\varkappa^0,$$

also

(16) $$n_1^0 + n_2^0 + \cdots + n_t^0 + e_1 + e_2 + \cdots + e_p = n$$

wird, so erhält man eine symmetrische Schaar R (68); durch Uebergang von R zu einer Schaar quadratischer Formen (indem man

$$X_{\varkappa\mu}^0 = \overline{Y}_{\varkappa\mu}^0$$

u. s. w. werden lässt) erhält man alsdann eine Schaar, welche von n Variabelen abhängt, singulär ist und die Minimalgradzahlen $m_1, \dots m_t$ besitzt, deren Koefficientensystem ferner

$$(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \dots p)$$

zu ETn hat. Also:

Man denke sich die Gleichung (16) in positiven, ungeraden Zahlen $n_\varkappa^0$ und in positiven Zahlen e_σ gelöst; dabei müssen die Zahlen $n_\varkappa^0$ wirklich auftreten, während die Zahlen e_σ in einer Lösung fehlen dürfen. Ist dann durch die Zahlen

* Kronecker, SB1891, S. 38 flg. Die Transformationen, welche eine singuläre Schaar in eine äquivalente überführen, bestimmt man nach 89 und 67.

$$n_1^0, n_2^0, \dots n_t^0, \quad e_1, e_2, \dots e_p$$

eine solche Lösung der Gleichung (16) gegeben, und man bestimmt zu *diesen* Zahlen $n_\varkappa^0$ durch die Gleichungen

$$n_\varkappa^0 = 2m_\varkappa + 1 \quad (\varkappa = 1, 2, \dots t)$$

neue Zahlen $m_1, m_2, \dots m_t$, wählt dann in (13) S. 130 für die $m_\varkappa$, e_σ *diese* Zahlen

$$m_1, m_2, \dots m_t, \quad e_1, e_2, \dots e_p,$$

setzt für $m_\varkappa = 0$ dabei $T_\varkappa^0 = 0$, wählt ferner die Konstanten $g \mid h$, $a_\sigma \mid b_\sigma$ beliebig, aber so, dass

$$g a_\sigma + h b_\sigma \gtrless 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots p)$$

ist, so besitzt diese Schaar (13) quadratischer Formen von n Variabelen die Minimalgradzahlen

$$m_1, m_2, \dots m_t$$

und ihr Koefficientensystem die ET

$$(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \dots p).$$

Mit anderen Worten:

XV. **Man kann bei gegebenem n singuläre von n Variabelen abhängige Schaaren quadratischer Formen bilden, welche vorgeschriebene Minimalgradzahlen haben und deren Koefficientensysteme vorgeschriebene Elementartheiler besitzen.**

Auf Grund dieses Theorems *klassificirt* man die singulären Schaaren (Paare) quadratischer Formen, die von gleichvielen Variabelen abhängen, in der wiederholt beschriebenen Weise (49, 62). Was die Aufstellung der zu den einzelnen Klassen gehörigen Normalformen anbelangt, so gelten hier analoge Bemerkungen, wie S. 114—115. Für $n = 1, 2, 3, 4$ können wir die Normalformen direkt aus 62 entnehmen, indem wir die Entstehung der reducirten Schaar R dieses Paragraphen aus der gleichbenannten in § 8 im Auge behalten. Wir finden so folgende

Klassen der singulären Paare quadratischer Formen von n Variabelen bei unbeschränkter Transformation der Variabelen im Falle

a) $n = 1$.

1. $\{1\}$: $\begin{matrix} 0, \\ 0. \end{matrix}$

b) $n = 2$.

1. $[\{1\}1]$
2. $\{11\}$

$\Big\}$ Die Normalformen sind identisch mit denjenigen für die Formenpaare, die von je *einer* Variabelen abhängen (66, a), 1, 70, a), 1).

c) $n = 3$.

1. $\{3\}$: $2x^0_{11}\bar{x}^0_{10}$, $2x^0_{10}\bar{x}^0_{10}$.

2. $[\{1\}11]$
3. $[\{1\}(11̇)]$
4. $[\{1\}2]$
5. $[\{11\}1]$
6. $\{111\}$

Die Normalformen sind identisch mit denjenigen für die Klassen von Formenpaaren, die von je *zwei* Variabelen abhängen, und zwar stimmen die Normalformen für die linksstehenden Klassen 2—6 der Reihe nach bez. mit denjenigen für die Klassen mit den Charakteristiken $[11̇]$, $[\{11\}]$, $[2]$, $[\{1\}1]$, $\{11\}$ überein.

$n = 4$.*

1. $[\{3\}1]$: $2x^0_{11}\bar{x}^0_{10} + a_1 x^2_{10}$, $2x^0_{10}\bar{x}^0_{10} + b_1 x^2_{10}$.

2. $\{31\}$, 3. $[\{1\}111]$, 4. $[\{1\}(11)1]$, 5. $[\{1\}(111)]$, 6. $[\{1\}21]$, 7. $[\{1\}(21)]$, 8. $[\{1\}3]$, 9. $[\{11\}11]$, 10. $[\{11\}(11)]$, 11. $[\{11\}2]$, 12. $[\{111\}1]$, 13. $\{1111\}$.

Die Normalformen dieser letzten 12 Klassen sind identisch mit denjenigen für die Klassen von Formenpaaren, die von je *drei* Variabelen abhängen, und zwar stimmen dieselben der Reihe nach mit denen für die Klassen mit den Charakteristiken $\{3\}$, $[111]$, u. s. w. überein.

Nachdem wir unter I die Hauptfragen über die *Reduktion, Aequivalenz und Klassifikation der Schaaren quadratischer Formen* dadurch beantwortet haben, dass wir von Schaaren bilinearer Formen allgemeiner Art zu solchen mit *symmetrischen Grundformen* und dann zu Schaaren quadratischer Formen übergingen, wollen wir uns nachstehend mit Formenschaaren beschäftigen, welche entweder *eine symmetrische und eine alternirende* oder *zwei alternirende Grundformen* besitzen.

II.

71. Der Satz 16 in 67 gilt nicht blos für symmetrische, sondern auch für alternirende Formen. Denn sind daselbst A und B alternirende Formen, so folgt aus der symbolischen Gleichung (7)

$$B = PAQ$$

oder

$$-B = Q'(-A)P'$$

$$B = Q'AP',$$

wie in 67; daher bleiben auch die weiteren Entwickelungen daselbst für alternirende Formen giltig. — Sind also A_1, A_2, A_3, ... mehrere

* Killing, a. S. 190 u. O.; Clebsch-Lindemann, Vorl. u. Geom. Leipzig (91) Bd. II S. 236. Der strenge Nachweis für die Vollständigkeit der daselbst aufgestellten Paare wird erst durch die citirten Arbeiten Kronecker's in SB 1890 und 1891 erbracht.

theils symmetrische, theils alternirende Formen, und gehen diese Formen durch dieselben Substitutionen P, Q in Formen PA_1Q, PA_2Q, $PA_3Q, \ldots$ über, die ebenfalls symmetrisch bez. alternirend sind, so kann man Substitutionen R', R berechnen derart, dass bei beliebigen Werthen von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ symbolisch

$$P(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \cdots)\, Q = R'(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \cdots)\, R$$

ist. Insbesondere hat man den Satz über Formenschaaren:

18) Sind zwei äquivalente Formenschaaren $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$ beide symmetrisch oder beide alternirend, oder sind ihnen A_1 und B_1 symmetrische, A_2 und B_2 alternirende Formen**, so sind die Schaaren stets auch — im S. 125 angegebenen Sinne — congruent.*

Diesen wichtigen Satz brauchen wir zur Ableitung eines Fundamentalsatzes über congruente Formen in § 10, woselbst auch das nun zu beweisende Theorem XVII über die ET des Koefficientensystems einer Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ bei symmetrischem A und alternirendem B zur Anwendung gelangt. Der Beweis dieses Theorems XVII stützt sich auf einen von Stickelberger gefundenen Satz, der an dieser Stelle gegeben werden möge. Wir bedienen uns im Folgenden wieder der symbolischen Rechnung mit Formen (§ 2).

Der Satz von Stickelberger lautet so:

XVI. Sind A und B zwei bilineare Formen von je $2n$ Variabelen $x_1, \ldots x_n$, $y_1, \ldots y_n$, ist die Determinante $|\lambda A - B|$ nicht identisch Null und $\lambda = c$ eine Wurzel der Gleichung $|\lambda A - B| = 0$, sind ferner

$$(\lambda - c)^{e_1}, \quad (\lambda - c)^{e_2}, \ldots$$

die sämmtlichen zur Basis $\lambda - c$ gehörenden Elementartheiler von $|\lambda A - B|$ nach abnehmender Grösse der Exponenten geordnet, und man entwickelt $(\lambda A - B)^{-1}$ nach steigenden Potenzen von $\lambda - c$, so beginnt die Entwickelung mit einem Gliede von der Gestalt

$$H(\lambda - c)^{-e_1}, \tag{16}$$

wo H eine bilineare Form bedeutet; ist der Rang von $|H|$ gleich r, so ist

$$e_1 = e_2 = \cdots = e_r > e_{r+1}.\text{***}$$

---

* Frobenius, Crelle's Journ. (79) Bd. 86, S. 168; SB 1896, S. 13—14.

** In diesem Falle kann man Satz 18) auch aus einem Satze von Kronecker folgern, den wir in § 10 beweisen werden (vergl. daselbst Satz 19).

*** Stickelberger, Crelle's Journ. (79) Bd. 86, S. 20 flg., Satz VIII. *Obiger Beweis rührt her von* Frobenius, *Briefliche Mittheilung vom 21. Juni 1898.*

Beweis. Dass die Entwickelung von $(\lambda A - B)^{-1}$ mit einem Gliede von der Gestalt (16) beginnt, ergiebt sich aus der Definition der ET und Gleichung (7) in 5.* Setzen wir nun

$$C = x_1 y_2 + x_2 y_3 + \cdots + x_{n-1} y_n,$$

so ist (symbolisch)

$$C^2 = x_1 y_3 + x_2 y_4 + \cdots + x_{n-2} y_n,$$
$$C^3 = x_1 y_4 + x_2 y_5 + \cdots + x_{n-3} y_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C^{n-1} = x_1 y_n,$$
$$C^n = 0.$$

Der Rang von $|C^{n-1}|$ ist gleich Eins.

Es seien jetzt $a, b, c \ldots$ ganze positive Zahlen (> 0), sei ferner

$$a + b + c + \cdots = s \leqq n$$

und

$$(17)\begin{cases} C_1 = x_1 y_2 + x_2 y_3 + \cdots\cdots\cdots\cdots + x_{a-1} y_a, \\ C_2 = x_{a+1} y_{a+2} + x_{a+2} y_{a+3} + \cdots\cdots + x_{a+b-1} y_{a+b}, \\ C_3 = x_{a+b+1} y_{a+b+2} + x_{a+b+2} y_{a+b+3} + \cdots + x_{a+b+c-1} y_{a+b+c}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + x_a y_a, \\ E_2 = x_{a+1} y_{a+1} + x_{a+2} y_{a+2} + \cdots\cdots + x_{a+b} y_{a+b}, \\ E_3 = x_{a+b+1} y_{a+b+1} + x_{a+b+2} y_{a+b+2} + \cdots + x_{a+b+c} y_{a+b+c}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

und zwar werde $C_k = 0$ gesetzt, wenn E_k nur aus einem Gliede $x_i y_i$ besteht. Ferner bedeute C_0 eine bilineare Form der Variabelen

$$x_{s+1},\ y_{s+1}, \cdots x_n,\ y_n,$$

welche nicht in $E_1, E_2, E_3, \ldots$ auftreten; diese sei ganz beliebig, aber so gewählt, dass $|C_0| \gtrless 0$ ist. Endlich sei noch

$$E_0 = x_{s+1} y_{s+1} + \cdots + x_n y_n;$$

wenn $s = n$ ist, denken wir $C_0 = E_0 = 0$ gesetzt. Man hat die Gleichung

$$(18) \qquad E = E_1 + E_2 + \cdots + E_0.$$

1. Wir betrachten jetzt die *specielle* Form

$$(19) \qquad B = C_1 + C_2 + \cdots + C_0$$

und nehmen weiter *speciell* $A = E$. Die Form $\lambda E - B$ ist dann eine in die Theile

* Vergl. auch Artikel 42.

$$\lambda E_1 - C_1,\quad \lambda E_2 - C_2, \ldots \lambda E_0 - C_0$$

zerlegbare. Die ET von $|\lambda E_1 - C_1|$, $|\lambda E_2 - C_2|$, $|\lambda E_3 - C_3|, \ldots$ sind bez. $\lambda^a, \lambda^b, \lambda^c, \ldots$; $|\lambda E_0 - C_0|$ besitzt keinen zur Basis λ gehörigen ET, da $|C_0| \neq 0$ ist. Also sind $\lambda^a, \lambda^b, \lambda^c, \ldots$ die ET von $|\lambda E - B|$ in Bezug auf die Basis λ (Theorem V in 33, 34 Schluss). Nach 22 ist ferner

(20) $$B^2 = C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_0^2,\quad B^3 = C_1^3 + C_2^3 + \cdots + C_0^3, \ldots$$

Wenn wir nun, was gestattet ist, voraussetzen, dass $a \geqq b \geqq c \geqq \ldots$ ist, so ist nach dem zu Anfang des Beweises Ausgeführten

$$C_1^a = C_2^a = \cdots = 0,$$

und somit wegen (20)

(21) $$B^a = C_0^a,\quad B^{a+1} = C_0^{a+1}, \ldots.$$

Ferner hat man nach (29) in 17

$$(\lambda E_1 - C_1)^{-1} = \frac{E_1}{\lambda} + \frac{C_1}{\lambda^2} + \frac{C_1^2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{C_1^{a-1}}{\lambda^a},$$

$$(\lambda E_2 - C_2)^{-1} = \frac{E_2}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda^2} + \frac{C_2^2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{C_2^{b-1}}{\lambda^b},$$

$$(\lambda E_3 - C_3)^{-1} = \frac{E_3}{\lambda} + \frac{C_3}{\lambda^2} + \frac{C_3^2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{C_3^{c-1}}{\lambda^c},$$

. . . .

. . . .

$$(\lambda E_0 - C_0)^{-1} = \frac{E_0}{\lambda} + \frac{C_0}{\lambda^2} + \frac{C_0^2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{C_0^{a-1}}{\lambda^a} + \frac{C_0^a}{\lambda^{a+1}} + \cdots$$

Durch Addition dieser Gleichungen ergiebt sich mit Rücksicht auf (18), (19), (20) und (21)

$$(\lambda E_1 - C_1)^{-1} + (\lambda E_2 - C_2)^{-1} + \cdots + (\lambda E_0 - C_0)^{-1}$$
$$= \frac{E}{\lambda} + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{B^2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{B^{a-1}}{\lambda^a} + \frac{B^a}{\lambda^{a+1}} + \frac{B^{a+1}}{\lambda^{a+2}} + \cdots.$$

Nun ist aber nach (29) in 17

$$(\lambda E - B)^{-1} = \frac{E}{\lambda} + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{B^2}{\lambda^3} + \cdots$$

und somit

(22) $$(\lambda E_1 - C_1)^{-1} + (\lambda E_2 - C_2)^{-1} + \cdots + (\lambda E_0 - C_0)^{-1} = (\lambda E - B)^{-1}.$$

Ferner wird, da $a \geqq b \geqq c \geqq \cdots$ vorausgesetzt wird, nach (16)

$$(\lambda E - B)^{-1} = \frac{H}{\lambda^a} + \frac{J}{\lambda^{a+1}} + \cdots.$$

Sind daher die r ersten Zahlen $a, b, c, \ldots$ *gleich* und grösser als die $(r+1)^{\text{te}}$, so wird nach Gleichung (22), wenn jedes Glied links nach steigenden Potenzen von λ entwickelt wird,

$$H = C_1^{a-1} + C_2^{a-1} + \cdots + C_r^{a-1}.$$

Jeder Theil der zerlegbaren Form H hat eine Determinante vom Range 1 (siehe oben); daher ist $|H|$ vom Range r; ist umgekehrt $|H|$ vom Range r, so müssen die r ersten Zahlen $a, b, c, \ldots$ gleich und grösser als die $(r+1)^{\text{te}}$ sein. *Damit ist unser Satz XVI für $A = E$, das durch (19) definirte B und für die Basis λ bewiesen.*

2. Nun sei allgemeiner in $\lambda A - B$

$$|A| \neq 0, \quad |B| = 0;$$

zur Basis λ sollen die ET

$$\lambda^a, \lambda^b, \lambda^c, \ldots$$

von $|\lambda A - B|$ gehören, wo $a \geqq b \geqq c \geqq \cdots$; wählen wir nun oben die Form C_0 so, dass die ET von $|\lambda E_0 - C_0|$ mit den nicht zur Basis λ gehörigen ETn von $\lambda A - B$ übereinstimmen, was wir nach dem Theoreme IX stets können,* wählen wir ferner oben für $a, b, c, \ldots$ diese Zahlen $a, b, c, \ldots$, so besitzt die Determinante $|\lambda E - \overline{B}|$, wo

$$\overline{B} = C_1 + C_2 + \cdots + C_0,$$

dieselben ET, wie $|\lambda A - B|$ (Theorem V); es giebt daher nach Theorem VIII lineare Substitutionen P, Q, deren Koefficienten von λ unabhängig sind, derart, dass

$$\lambda E - \overline{B} = P(\lambda A - B)Q$$

ist; hieraus folgt nach Gleich. (20) in 12

$$(\lambda E - \overline{B})^{-1} = Q^{-1}(\lambda A - B)^{-1}P^{-1}$$

oder, wenn

$$(\lambda E - \overline{B})^{-1} = \frac{\overline{H}}{\lambda^a} + \cdots, \quad (\lambda A - B)^{-1} = \frac{H}{\lambda^a} + \cdots,$$

$$\frac{\overline{H}}{\lambda^a} + \cdots = Q^{-1}\left(\frac{H}{\lambda^a} + \cdots\right)P^{-1};$$

hieraus folgt aber, da Q^{-1}, P^{-1} von λ unabhängige Formen sind,

$$\overline{H} = Q^{-1}HP^{-1}.$$

Da $|Q^{-1}|$ und $|P^{-1}|$ von Null verschiedene Determinanten sind, so ist $|\overline{H}|$ vom selben Range, wie $|H|$ (vergl. Art. 24). Ist daher $|H|$ vom

* Denn setzt man im Theoreme $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -1$, $a_\sigma = 1$, $b_\sigma = c_\sigma$, $g = 1$, $h = 0$, so besagt dasselbe, dass $|\lambda A - B|$ die ET $(\lambda - c_\sigma)^{e_\sigma}$ $(\sigma = 1, 2, \ldots m)$ besitzt; die Form A ist aber von der Gestalt $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$, wie sich durch passende Umbezeichnung der $X_{\sigma\mu}$, $Y_{\sigma\nu}$ ergiebt (77).

Range r, so ist auch $|\bar{H}|$ vom Range r, $|\lambda E - B|$ hat den ET λ^a genau $r$mal nach dem oben unter 1. Gezeigten, und somit hat auch $|\lambda A - B|$ diesen ET λ^a genau r-mal. *Damit ist Theorem XVI auch für* $|A| \neq 0$, $|B| = 0$ *und die Basis* λ *bewiesen.*

3. Nun sei endlich $|\lambda A - B| \not\equiv 0$, und zur Basis $(\lambda - c)$ mögen die ET $(\lambda - c)^{e_1}$, $(\lambda - c)^{e_2}, \ldots$ gehören, wo

$$e_1 \geqq e_2 \geqq \cdots \geqq e_r \geqq \cdots$$

sei. Ferner sei

(23) $$(\lambda A - B)^{-1} = H(\lambda - c)^{-e_1} + J(\lambda - c)^{-e_1+1} + \cdots$$

und $|H|$ vom Range r. Ist dann $\lambda = g$ keine Wurzel der Gleichung

$$|\lambda A - B| = 0,$$

und wir setzen (37)

(24) $$\lambda = c + \frac{(c-g)\lambda'}{-\lambda' + 1}$$

oder

(25) $$\lambda' = \frac{\lambda - c}{\lambda - g},$$

so wird

$$\lambda A - B = \frac{1}{\lambda' - 1}[\lambda'(gA - B) - (cA - B)],$$

oder für

$$gA - B = \bar{A},\ cA - B = \bar{B},$$

$$\lambda A - B = \frac{1}{\lambda' - 1}(\lambda'\bar{A} - \bar{B}).$$

Wir führen nun in (23) die Substitution (24) für λ aus. Dann erhalten wir, da in Folge der letzten Gleichung

$$(\lambda A - B)^{-1} = (\lambda'\bar{A} - \bar{B})^{-1}\left(\frac{E}{\lambda' - 1}\right)^{-1} = (\lambda'\bar{A} - \bar{B})(\lambda' - 1)$$

ist,

$$(\lambda' - 1)(\lambda'\bar{A} - \bar{B})^{-1} = \frac{H}{(c-g)^{e_1}} \cdot \lambda'^{-e_1}(1 - \lambda')^{e_1} + \cdots;$$

entwickelt man daher $(\lambda'\bar{A} - \bar{B})^{-1}$ nach steigenden Potenzen von λ', so hat diese Entwickelung die Gestalt

$$(\lambda'\bar{A} - \bar{B})^{-1} = -\frac{H}{(c-g)^{e_1}}\lambda'^{-e_1} + \cdots$$

Die Determinante $|\lambda'\bar{A} - \bar{B}|$ besitzt die zur Basis λ' gehörigen ET

$$\lambda'^{e_1},\ \lambda'^{e_2},\ \lambda'^{e_3}\ldots$$

(37), wobei $e_1 \geqq e_2 \geqq e_3 \geqq \cdots$, $|\bar{A}|$ ist nicht Null, aber $|\bar{B}|$, der Rang von $|H|$ ist gleich r; daher ist nach dem oben unter 2) Bewiesenen

$$e_1 = e_2 = e_3 = \cdots = e_r > e_{r+1}.$$

Damit ist das Theorem XVI allgemein bewiesen.

72. Wir wenden uns nun zum Beweise des schon erwähnten Theorems XVII von Kronecker:*

XVII. Ist S eine symmetrische, T eine alternirende bilineare Form von $2n$ Variabelen, so treten im Koefficientensysteme von $\lambda_1 S + \lambda_2 T$ die Elementartheiler von der Gestalt $\lambda_1^{2\varkappa}$ und $\lambda_2^{2\varkappa+1}$ stets paarweise auf.

1. Sei $|T| = 0$, aber zunächst $|\lambda_1 S + \lambda_2 T| \equiv\!\!\!|= 0$. Die zur Basis λ_1 gehörenden ET der Determinante $|\lambda_1 S + \lambda_2 T|$ mögen die Exponenten $e_1, e_2, \ldots$ haben, wo

$$e_1 \geqq e_2 \geqq \ldots$$

sei. Dann besitzt die Determinante $|\lambda S - T|$ die ET $\lambda^{e_1}, \lambda^{e_2}, \ldots$ (37). Nach steigenden Potenzen von λ entwickelt sei

(26) $$(\lambda S - T)^{-1} = H\lambda^{-e_1} + \cdots$$

Geht man rechts und links zur conjugirten Form über, so wird mit Rücksicht auf Gleichung (18) in 12

$$(\lambda S + T)^{-1} = H'\lambda^{-e_1} + \cdots;$$

setzt man hierin aber $\lambda = -\lambda$, so erhält man

(27) $$(\lambda S - T)^{-1} = H'\lambda^{-e_1}(-1)^{e_1+1} + \cdots$$

Aus (26) und (27) folgt

$$H' = (-1)^{e_1+1} H.$$

Ist daher e_1 *gerade*, so ist $H' = -H$, H also alternirend, der Rang r von $|H|$ eine *gerade* Zahl (9, Satz c); es ist aber

$$e_1 = e_2 = \cdots = e_r > e_{r+1}$$

nach Theorem XVI. *Also treten die ET $\lambda_1^{e_1}$ von $|\lambda_1 S + \lambda_2 T|$ in gerader Zahl auf.* Es ist noch nachzuweisen, dass auch die übrigen zur Basis λ_1 gehörenden ET von der Gestalt $\lambda_1^{2\varkappa}$ paarweise auftreten. Dieser Nachweis wird gleich erbracht werden, vorher sei

2. $|S| = 0$, $|\lambda_1 S + \lambda_2 T| \equiv\!\!\!|= 0$, und die zur Basis λ_2 gehörenden ET gleich $\lambda_2^{e_1}, \lambda_2^{e_2}, \ldots$, wo $e_1 \geqq e_2 \geqq \cdots$. Dann besitzt $|\lambda T - S|$ die ET $\lambda^{e_1}, \lambda^{e_2}, \ldots$; man hat analog 1)

$$\begin{aligned}(\lambda T - S)^{-1} &= H\,\lambda^{-e_1} + \cdots,\\ (\lambda T - S)'^{-1} &= H'\lambda^{-e_1} + \cdots,\\ (-\lambda T - S)^{-1} &= H'\lambda^{-e_1} + \cdots\\ (\lambda T - S)^{-1} &= H'\lambda^{-e_1}(-1)^{e_1},\\ H' &= (-1)^{e_1} H.\end{aligned}$$

---

* Kronecker, BM 1874, S. 441 (G. W. Bd. I, S. 477). Vergl. auch Stickelberger, Crelle's Journ. (79) Bd. 86, S. 42—43. *Obigen Beweis gab* Frobenius *(Briefliche Mittheilung vom 21. Juni 1898).*

Ist daher e_1 *ungerade*, so ist H alternirend, $|H|$ von geradem Range r', also wegen Theorem XVI

$$e_1 = e_2 = \cdots = e_r > e_{r+1},$$

wo r eine gerade Zahl. *Also treten die ET $\lambda_2^{e_1}$ von $|\lambda_1 S + \lambda_2 T|$ in gerader Zahl auf.* Auch hier ist der Nachweis zu erbringen, dass auch die übrigen ET von der Gestalt $\lambda_2^{2\varkappa+1}$ stets paarweise auftreten.

3. Wir sahen unter 1) und 2), dass bei geradem e_1 (ungeradem e_1) neben jedem ET $\lambda_1^{e_1}$ ($\lambda_2^{e_1}$) von $|\lambda_1 S + \lambda_2 T|$ ein zweiter ET $\lambda_1^{e_1}$ ($\lambda_2^{e_1}$) auftritt. Es fragte sich, ob alle ET von der Gestalt $\lambda_1^{2\varkappa}$ und $\lambda_2^{2\varkappa+1}$ paarweise auftreten. Dieses ist der Fall und zwar auch dann, wenn $|\lambda_1 S + \lambda_2 T| \equiv 0$ ist.

Sei, wie bisher $S' = S$, $T' = -T$, aber $|\lambda_1 S + \lambda_2 T| \equiv 0$ und r der Rang dieser Determinante; ϱ sei eine positive ganze Zahl $\leqq r$; der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades von $|\lambda_1 S + \lambda_2 T|$ enthalte λ_1 zur Potenz l_ϱ* (Bezeichnung also jetzt wieder, wie in 4 flg.), sei ferner

$$e_\varrho = l_\varrho - l_{\varrho-1},$$

so dass also jetzt

$$e_r \geqq e_{r-1} \geqq \cdots$$

ist. *Wir setzen nun voraus, dass für ein $\varrho \leqq r-1$ die Ungleichung*

$$e_{\varrho+1} > e_\varrho$$

besteht, und zeigen, dass es alsdann eine in Bezug auf λ_1 reguläre Hauptunterdeterminante ϱ^{ten} Grades von $|\lambda_1 S + \lambda_2 T|$ giebt.

Bezeichnen wir nämlich, wie in 4 flg., die Determinante $|\lambda_1 S + \lambda_2 T|$ mit $|a_{ik}|$ und verstehen in 9 unter Q und R speciell zwei Determinanten ϱ^{ten} Grades

$$Q = |a_{\varkappa\nu}| \quad (\varkappa = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\varrho; \quad \nu = \nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\varrho),$$
$$R = |a_{\mu\lambda}| \quad (\mu = \nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\varrho; \quad \lambda = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\varrho)$$

des Systems der a_{ik}, dann wird daselbst

$$P = |a_{\varkappa\lambda}| \quad (\varkappa = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\varrho; \quad \lambda = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\varrho),$$
$$S = |a_{\mu\nu}| \quad (\mu = \nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\varrho; \quad \nu = \nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\varrho);$$

P und S sind also dann Hauptunterdeterminanten. Nun sei Q in Bezug auf λ_1 regulär, enthalte also λ_1 genau zur Potenz l_ϱ; dann gilt das Gleiche von R, da Q in R übergeht, wenn man in ihm $-\lambda_2$ für λ_2 setzt. Nach a) in 9 muss aber λ_1 mindestens in der Potenz $l_{\varrho-1} + l_{\varrho+1}$ in

$$PS - QR$$

auftreten, wobei wegen $e_{\varrho+1} > e_\varrho$

$$l_{\varrho+1} + l_{\varrho-1} > 2 l_\varrho$$

ist. Man kann also

---

* Wo nicht alle Zahlen l_ϱ Null seien.

$$QR = PS + \lambda_1^{2l_\varrho+\varepsilon} U$$

setzen, wo $\varepsilon > 0$ und U nicht durch λ_1 theilbar ist. Wäre nun P oder S nicht regulär, so wäre die rechte Seite der letzten Gleichung durch eine höhere Potenz, als die $2l_\varrho^{\text{te}}$ Potenz von λ_1 theilbar; die linke aber ist nur durch die $2l_\varrho^{\text{te}}$ theilbar; daher ist sowohl R als S regulär. — *Es giebt ferner stets eine in Bezug auf λ_1 reguläre Hauptunterdeterminante r^{ten} Grades.* Denn setzt man vorstehend in P, Q, R, S

$$\varrho = r,$$

so wird $PS = QR$ (9, b); ist daher Q und damit auch R regulär, so sind auch P und S regulär.

Es sei nun R eine in Bezug auf λ_1 reguläre Hauptunterdeterminante r^{ten} Grades des Systems von $\lambda_1 S + \lambda_2 T$; die bilineare Form, deren Determinante R ist, wollen wir mit $\lambda_1 S_0 + \lambda_2 T_0$ bezeichnen. Alsdann ist S_0 symmetrisch, T_0 alternirend. Die ET von R in Bezug auf die Basis λ_1 sind identisch mit denen des Koefficientensystems von $\lambda_1 S + \lambda_2 T$ in Bezug auf diese Basis λ_1 (6, d), d. h. R besitzt die ET $\lambda_1^{e_r}$, $\lambda_1^{e_{r-1}}, \ldots$ Ist daher e_r eine gerade Zahl, so tritt nach 1) oben der ET $\lambda_1^{e_r}$ in gerader Zahl auf. Es ist also dann

$$e_r = e_{r-1} = \cdots = e_{\varrho+1} > e_\varrho,$$

wo $r - \varrho$ eine gerade Zahl vorstellt. Wegen $e_{\varrho+1} > e_\varrho$ existirt nun aber wieder eine reguläre Hauptunterdeterminante ϱ^{ten} Grades, und die Anwendung der eben aufgeführten Schlussweise zeigt, dass bei geradem e_ϱ die Anzahl der ET $\lambda_1^{e_\varrho}$ eine gerade ist. U. s. w.

Ganz analog beweist man mittelst 2. oben, dass die ET von der Gestalt $\lambda_2^{2\varkappa+1}$ stets paarweise auftreten. *Damit ist denn unser Theorem XVII vollständig bewiesen.** Gehen wir nunmehr zur Anwendung der Sätze 18 und XVII über.

§ 10. Congruente Formen.

73. Geht eine bilineare Form A durch die congruenten linearen Substitutionen R', R in eine Form B über, ist also symbolisch (13)

$$B = R'AR,$$

dann geht durch dieselben Substitutionen die zu A conjugirte Form A' in die zu B conjugirte Form B' über, d. h. es ist

$$B' = R'A'R.$$

* Sind *S und T* alternirende Formen, so treten die ET des Systems von $|\lambda_1 S + \lambda_2 T|$ stets *paarweise* auf und die Minimalgradzahlen m_i und $\overline{m}_i$ stimmen, wenn $|\lambda_1 S + \lambda_2 T| \equiv 0$ ist, überein. Man kann ferner Formenschaaren mit alternirenden Grundformen bilden, welche im angegebenen Sinne vorgeschriebene Kronecker'sche und Weierstrass'sche Invarianten besitzen. Vergl. Frobenius, Crelle's Journ. (79) Bd. 86, S. 20 flg. § 7 u. § 13. E. v. Weber, Münch. Berichte von 1898, S. 369 flg.

Man hat also dann für beliebige Werthe von $\lambda_1 | \lambda_2$

$$\lambda_1 B + \lambda_2 B' = R'(\lambda_1 A + \lambda_2 A')R,$$

d. h. die Formenschaaren $\lambda_1 A + \lambda_2 A'$ und $\lambda_1 B + \lambda_2 B'$ sind äquivalent. Die Aequivalenz der Schaaren $\lambda_1 A + \lambda_2 A'$ und $\lambda_1 B + \lambda_2 B'$ ist also eine *nothwendige* Bedingung für die Congruenz der Formen A und B; dass sie auch die *hinreichende* Bedingung hierfür ist, das ist eines der wichtigsten Ergebnisse der Kronecker'schen Arbeit: „Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen".* Wir leiten mittelst des Satzes 18) in 71 dasselbe mit Leichtigkeit her.**

Ist nämlich A' zu A, B' zu B conjugirt, und sind die Schaaren $\lambda_1 A + \lambda_2 A'$ und $\lambda_1 B + \lambda_2 B'$ äquivalent, so besteht für zwei von $\lambda_1 | \lambda_2$ unabhängige Formen P, Q, wo $|P| \neq 0$, $|Q| \neq 0$ ist, die symbolische Gleichung

(1) $$\lambda_1 B + \lambda_2 B' = P(\lambda_1 A + \lambda_2 A')Q.$$

Nun setze man

$$A + A' = A_1, \quad A - A' = A_2,$$
$$B + B' = B_1, \quad B - B' = B_2.$$

Es ist

$$A_1' = A_1, \quad B_1' = B_1, \quad A_2' = -A_2, \quad B_2' = -B_2.$$

Da die Gleichung (1) für beliebige Werthe von $\lambda_1 | \lambda_2$ gilt, so folgt aus ihr für $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ bez. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

$$B_1 = PA_1Q, \quad B_2 = PA_2Q$$

und hieraus weiter

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = P(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)Q.$$

Die Schaaren $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ und $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$ sind äquivalent, A_1 und B_1 sind symmetrische, A_2 und B_2 alternirende Formen; daher giebt es nach Satz 18) eine Substitution R derart, dass

$$B_1 = R'A_1R, \quad B_2 = R'A_2R$$

ist. Man hat also für beliebige $\lambda_1 | \lambda_2$

(2) $$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = R'(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)R,$$

mithin, da

$$\frac{A_1 + A_2}{2} = A, \quad \frac{B_1 + B_2}{2} = B$$

ist, für $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ in (2) $\quad B = R'AR.$

Also gilt in der That der Satz:

XVIII. **Zwei bilineare Formen A und B, die von gleichvielen Variabelenpaaren abhängen, sind dann und nur dann congruent, wenn die Schaaren $\lambda_1 A + \lambda_2 A'$ und $\lambda_1 B + \lambda_2 B'$ äquivalent sind, wo A', B' die zu A bez. B conjugirten Formen bedeuten.**

---

* BM 1874, S. 397—447 (Ges. W. 424—483).

** Frobenius, SB 1896, S. 14.

Ueber die Congruenz zweier Formen kann man auf rationalem Wege entscheiden. Die Substitutionen, welche eine Form in eine congruente überführen, bestimmt man nach 39 und 67; sie sind im Allgemeinen nicht rational.

74. Eine Form mit cogredienten Veränderlichen $x_i \mid y_i$ (13) heisst eine **irreducibele** oder **elementare**, wenn sie unzerlegbar und auch zu keiner zerlegbaren Form congruent ist; eine aus lauter elementaren Formen zusammengesetzte bilineare Form mit cogredienten Veränderlichen heisst eine **reducirte Form**. U. s. w. (25).

Mit der Reduktion einer Form werden wir uns nachstehend beschäftigen; hierzu ist zunächst erforderlich, dass wir untersuchen, wie im besonderen Falle, wo A und A' conjugirte Formen sind, die zur Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 A'$ gehörenden Minimalgradzahlen m_i $\overline{m}_i$ und die ET des Systems von $|\lambda_1 A + \lambda_1 A'|$ sich verhalten.

Setzen wir $S = \lambda_1 A + \lambda_2 A'$, so geht $\frac{\partial S}{\partial y_i}$ aus $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ dadurch hervor, dass $y_i = x_i$ gesetzt und λ_1 mit λ_2 vertauscht wird. Die Reihe der Zahlen m_i besteht also aus denselben Zahlen, wie die der Zahlen $\overline{m}_i$, so dass wir im Falle $|\lambda_1 A + \lambda_2 A'| \equiv 0$ ist, wie bei den symmetrischen Formenschaaren, nur *eine* Reihe von Minimalgradzahlen in Betracht zu ziehen haben.

Bedeutet r den Rang von $|\lambda_1 A + \lambda_2 A'|$, ϱ eine Zahl $\leqq r$ und D_ϱ den grössten gemeinschaftlichen Theiler aller Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades von $|\lambda_1 A + \lambda_2 A'|$, so ist D_ϱ eine symmetrische oder eine alternirende Form der Variabelen λ_1, λ_2. Denn jede Subdeterminante ϱ^{ten} Grades geht durch Vertauschung von λ_1 und λ_2 wieder in eine Subdeterminante ϱ^{ten} Grades über. Da D_ϱ durch $D_{\varrho-1}$ theilbar ist, so bestehen Gleichungen

$$D_\varrho = D_{\varrho-1} E_\varrho \quad (\varrho = 1, 2, \ldots r, \quad D_1 = E_1).$$

Die homogenen ganzen Funktionen E_ϱ sind ebenfalls symmetrisch oder alternirend und zwar ist E_ϱ durch $E_{\varrho-1}$ theilbar (Theorem I in 5). Zerlegt man nun die E_ϱ in Faktoren, die Potenzen verschiedener in $\lambda_1 \mid \lambda_2$ linearer Formen sind, so erhält man alle ET des Systems (4). Da nun aber die E_ϱ symmetrisch oder alternirend sind, so gehört zu jedem solchen Faktor $(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma}$ von E_ϱ ein Faktor $(a_\sigma \lambda_2 + b_\sigma \lambda_1)^{e_\sigma}$; diese Faktoren sind verschiedene ET des Systems, wenn nicht

$$\left(\frac{a_\sigma}{b_\sigma}\right)^2 = 1$$

ist. *Wenn also* $\left(\frac{a_\sigma}{b_\sigma}\right)^2 \neq 1$ *ist, so gehört zu jedem ET* $(a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma}$ ein *ET* $(b_\sigma \lambda_1 + a_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma}$. Wie verhalten sich nun die ET mit der Basis $a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2$, wo $\left(\frac{a_\sigma}{b_\sigma}\right)^2 = 1$, d. h. die ET mit der Basis $\lambda_1 + \lambda_2$ und $\lambda_1 - \lambda_2$? Können diese in beliebiger Zahl auftreten oder herrscht auch

hier ein Gesetz? Dies ist in der That der Fall; denn setzen wir vorübergehend wieder $A + A' = S, \quad A - A' = T,$

so ist S symmetrisch, T alternirend. Durch die Substitution

$$\lambda_1 = \lambda_1' + \lambda_2', \quad \lambda_2 = \lambda_1' - \lambda_2'$$

wird aber

$$\lambda_1 A + \lambda_2 A' = \lambda_1' S + \lambda_2' T.$$

Besitzt nun das System von $|\lambda_1 A + \lambda_2 A'|$ den ET $(\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha$ $[(\lambda_1 - \lambda_2)^\alpha]$, so besitzt das von $|\lambda_1' S + \lambda_2' T|$ den ET $\lambda_1'^\alpha$ $[\lambda_2'^\alpha]$. Ist nun α gerade [ungerade], so tritt nach Theorem XVII neben jedem ET $\lambda_1'^\alpha$ $[\lambda_2'^\alpha]$ ein zweiter ET $\lambda_1'^\alpha$ $[\lambda_2'^\alpha]$ auf; das Gleiche gilt also von dem ET $(\lambda_1 + \lambda_2)^\alpha$ $[(\lambda_1 - \lambda_2)^\alpha]$, wenn α gerade [ungerade] ist. *Die ET von der Gestalt* $(\lambda_1 + \lambda_2)^{2\varkappa}$ *und* $(\lambda_1 - \lambda_2)^{2\varkappa+1}$ *sind also stets paarweise vorhanden.* Dagegen können ET von der Gestalt $(\lambda_1 + \lambda_2)^{2\varkappa+1}$ oder $(\lambda_1 - \lambda_2)^{2\varkappa}$ *in gerader oder ungerader Zahl* auftreten, wie man sich an Beispielen leicht überzeugt. Z. B. hat man für

$$A = x_1 y_1 + \cdots x_n y_n = E, \; A' = E, \; \text{und } |\lambda_1 A + \lambda_2 A'| = (\lambda_1 + \lambda_2)^n$$

hat den ET $(\lambda_1 + \lambda_2)$ n-mal, wo n gerade oder ungerade sein kann. Für $A = x_1 y_1 + x_2 y_1 - x_1 y_2$ wird $A' = x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1$, und $|\lambda_1 A + \lambda_2 A'|$ hat daher den einen ET $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$. Dagegen wird für

$$A = (x_1 y_1 + x_2 y_1 - x_1 y_2) + (x_3 y_3 + x_4 y_3 - x_3 y_4)$$

die Determinante $|\lambda_1 A + \lambda_2 A'|$ den ET $(\lambda_1 - \lambda_2)^2$ zweimal besitzen.

Fassen wir das Ermittelte in dem Theoreme zusammen:

XIX. Ist $\lambda_1 A + \lambda_2 A'$ eine Formenschaar mit conjugirten Grundformen, so stimmen ihre Minimalgradzahlen m_i und $\overline{m}_i$ überein; die Elementartheiler des Systems von $|\lambda_1 A + \lambda_2 A'|$ sind paarweise von gleichem Grade und für reciproke Werthe von $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ gleich Null, mit Ausnahme derjenigen von der Gestalt $(\lambda_1 + \lambda_2)^{2\varkappa+1}$ oder $(\lambda_1 - \lambda_2)^{2\varkappa}$, welch' letztere auch in ungerader Zahl auftreten können.*

75. Setzen wir daher $n_i^0 = 2m_i + 1$, deuten ferner durch ein über einen Exponenten e_σ eines ETs gesetztes Plus- oder Minuszeichen an, dass derselbe zur Basis $\lambda_1 + \lambda_2$ bez. $\lambda_1 - \lambda_2$ gehört, so ist, da hier $m_i = \overline{m}_i$, nach Gleichung (30) in 61

$$n = \sum n_i^0 + \sum \overset{+}{e}_\sigma + \sum \overset{-}{e}_\sigma + \sum e_\sigma. \tag{3}$$

Die n_i^0 sind ungerade Zahlen, und zwar fehlen dieselben, wenn $|\lambda_1 A + \lambda_2 A'| \not\equiv 0$ ist. Die geraden Zahlen $\overset{+}{e}_\sigma$ und die ungeraden

* Kronecker, l. c. S. 441 (S. 476).

Zahlen $\overline{e}_\sigma$ treten stets zweimal auf; die Zahlen e_σ sind immer doppelt vorhanden.

An die Gleichung (3) knüpft sich die analoge Frage, wie an die Gleichung (3) in 49, (30) in 61 u. s. w., nämlich die Frage, ob es bei gegebenem n bilineare Formen A von $2n$ Variabelen giebt, zu denen Schaaren $\lambda_1 A + \lambda_2 A'$ mit vorgeschriebenen Kronecker'schen und Weierstrass'schen Invarianten gehören. Dieses ist in der That der Fall, wie wir sofort nachweisen werden. Wir betrachten nämlich folgende bilineare Formen*:

1. $T_i^0 = \sum x_k y_{k+1}$ $\quad (k = 0, 1, \ldots 2m_i - 1, n_i^0 = 2m_i + 1, n_i^0 > 1)$,

2. $T_\sigma = \sum (x_k y_{k+1} + c x_{k+1} y_k)$ $\quad (k = 0, 1, \ldots 2e_\sigma - 2;\ c^2 \neq 1)$,

3. $\overset{+}{G}_\sigma = \sum (x_k y_{k+1} + (-1)^k x_{k+1} y_k)$ $\quad (k = 0, 1, \ldots 2\overset{+}{e}_\sigma - 2;\ \overset{+}{e}_\sigma = 2\varkappa)$,

4.** $\overset{+}{U}_\sigma = x_0 y_0 + \sum (x_k y_{k-1} + (-1)^k x_{k-1} y_k)$ $\quad (k = 1, 2, \ldots \overset{+}{e}_\sigma - 1;\ \overset{+}{e}_\sigma = 2\varkappa + 1)$,

5. $\overline{G}_\sigma = x_0 y_0 + \sum (x_k y_{k-1} + (-1)^k x_{k-1} y_k)$ $\quad (k = 1, 2, \ldots \overline{e}_\sigma - 1;\ \overline{e}_\sigma = 2\varkappa)$,

6. $\overline{U}_\sigma = \sum (x_k y_{k+1} - (-1)^k x_{k+1} y_k)$ $\quad (k = 0, 1, \ldots 2\overline{e}_\sigma - 2;\ \overline{e}_\sigma = 2\varkappa + 1)$.

1. Die Form T_i^0 hängt von $2m_i + 1 = n_i^0$ Variabelenpaaren

$$x_0,\ x_1, \ldots x_{2m_i - 1},\ x_{2m_i},\ y_0,\ y_1, \ldots y_{2m_i - 1},\ y_{2m_i}$$

ab, wenn wir $x_0 y_0,\ x_1 y_1, \ldots x_{2m_i} y_{2m_i}$ als zusammengehörige Variabele auffassen. Die Variabelen x_{2m_i} und y_0 treten dabei in T_i^0 nicht wirklich auf. Ferner ist die Determinante $|\lambda_1 T_i^0 + \lambda_2 T_i^{0\prime}| \equiv 0$, der Rang derselben ist $2m_i$; es giebt daher nur *eine* lineare Relation zwischen den Ableitungen von $\lambda_1 T_i^0 + \lambda_2 T_i^{0\prime}$ nach den x_i bez. y_i; ET treten keine auf; es ist mithin wegen (3), wenn m_i' die zur Schaar gehörige Minimalgradzahl bedeutet,

$$n_i^0 = 2m_i' + 1 = 2m_i + 1$$
$$m_i' = m_i.$$

Die Schaar $\lambda_1 T_i^0 + \lambda_2 T_i^{0\prime}$ besitzt also nur eine Invariante $n_i^0 = 2m_i + 1$.

2. Die Form T_σ hängt von $2e_\sigma$ Variabelenpaaren $x_0 y_0,\ x_1 y_1, \ldots$ ab. Die ET der Determinante $|\lambda_1 T_\sigma + \lambda_2 T_\sigma'|$ sind

$$(\lambda_1 + c\lambda_2)^{e_\sigma},\quad (c\lambda_1 + \lambda_2)^{e_\sigma}.$$

3. Die Formenschaar $\lambda_1 \overset{+}{G}_\sigma + \lambda_2 \overset{+}{G}_\sigma'$ hängt von $2\overset{+}{e}_\sigma$ Variabelenpaaren ab; die ET ihrer Determinante sind

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^{\overset{+}{e}_\sigma},\quad (\lambda_1 + \lambda_2)^{\overset{+}{e}_\sigma}.$$

---

* Kronecker, l. c. S. 440 (S. 475).

** Für $e_\sigma = 1$ ist $\overset{+}{U}_\sigma = x_0 y_0$ zu nehmen.

4. Die Schaar $\lambda_1 \overset{+}{U}_\sigma + \lambda_2 \overset{+}{U}'_\sigma$ hängt von $\overset{+}{e}_\sigma$ Variabelenpaaren ab; ihre Determinante besitzt einen ET

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^{\overset{+}{e}_\sigma}.$$

5. Die Schaar $\lambda_1 \overline{G}_\sigma + \lambda_2 \overline{G}'_\sigma$ hängt von $\overline{e}_\sigma$ Variabelenpaaren ab; ihre Determinante hat den einen ET

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^{e_\sigma}.$$

6. Endlich hängt die Schaar $\lambda_1 \overline{U}_\sigma + \lambda_2 \overline{U}'_\sigma$ von $2\overline{e}_\sigma$ Variabelenpaaren ab; ihre Determinante hat zwei ET

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^{\overline{e}_\sigma}, \quad (\lambda_1 - \lambda_2)^{\overline{e}_\sigma}.$$

Ist nun eine beliebige Lösung der Gleichung (3) in Zahlen $n_i^0, e_\sigma, \ldots$ der angegebenen Art vorgelegt, und wir bilden zu jedem n_i^0, das grösser als 1 ist, eine Form T_i^0, wobei wir in $T_1^0, T_2^0, \ldots$ die Variabelen so bezeichnen, dass je zwei dieser Formen keine Variabele gemein haben, bilden analog weiter zu jedem Exponentenpaare e_σ eine Form T_σ, wobei wir die $c = c_\sigma$ beliebig aber $c_\sigma^2 \gtrless 1$ wählen, zu jedem Exponentenpaare $\overset{+}{e}_\sigma$ $(\overset{+}{e}_\sigma = 2\varkappa)$ eine Form $\overset{+}{G}_\sigma$, u. s. w., so ist die Summe aller dieser Formen eine Form R, die von $n - \varrho$ Variabelenpaaren abhängt, wenn ϱ der Zahlen n_i^0 gleich Eins sind. Sind alle Zahlen n_i^0 gleich Eins, so setzen wir $R = 0$. Da aber die Schaar $\lambda_1 R + \lambda_2 R'$ eine zerlegbare ist, so besitzt nach dem Satze S. 112 diese Schaar die Invarianten n_i^0, $(c_\sigma \lambda_1 + \lambda_2)^{e_\sigma}, \ldots$, wenn wir sie bei $\varrho > 0$ als von $2n$ Variabelen abhängig betrachten, also eine identisch verschwindende Theilschaar hinzuschreiben. Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Bezeichnen wir die Invarianten $n_i^0, e_\sigma, \ldots$, die zu einer Schaar $\lambda_1 R + \lambda_2 R'$ gehören, als die Kronecker'schen Invarianten (Minimalgradzahlen) und die Weierstrass'schen Invarianten der Form R mit cogredienten Variabelen, so können wir das erlangte Resultat so aussprechen:

XX. Es giebt bei gegebenem n Formen mit $2n$ cogredienten Veränderlichen, welche — im Sinne des Theorems XIX — vorgeschriebene Kronecker'sche und Weierstrass-sche Invarianten besitzen.

Die Formen 1 — 6 oben sind nicht zerlegbar, aber auch zu keinen zerlegbaren Formen congruent. Für die Formen 1, 4, 5 geht dies unmittelbar daraus hervor, dass zu ihnen nur je *eine* Invariante gehört. Für die übrigen folgert man es leicht aus Theorem XIX. Wäre z. B. $\overset{+}{G}_\sigma$ zu einer zerlegbaren Form $G = G_1 + G_2$ congruent, so wäre

auch die Schaar $\lambda_1 G + \lambda_2 G'$ zerlegbar in die Theile $\lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_1' = H_1$ und $\lambda_1 G_2 + \lambda_2 G_2' = H_2$; die ET von $|\lambda_1 G + \lambda_2 G'|$ sind aber die von $|H_1|$ und $|H_2|$ zusammengenommen; nach Theorem XIX besässe daher $|\lambda_1 G + \lambda_2 G'|$ vier ET, und damit auch

$$|\lambda_1 \overset{+}{G}_\sigma + \lambda_2 \overset{+}{G}{}'_\sigma|.$$

U. s. w.

Die vorhin beschriebene Form R setzt sich also aus lauter elementaren Formen zusammen, d. h. es ist eine *reducirte Form.*

Eine der eben angewandten ganz analoge Schlussweise lehrt (XIX, XX), *dass eine bilineare Form mit cogredienten Variabelen dann und nur dann irreducibel ist, wenn sie entweder eine einzige Kronecker'sche Invariante besitzt, oder zwei Weierstrass'sche Invarianten* $(\lambda_1 + c\lambda_2)^{e_\sigma}$, $(c\lambda_1 + \lambda_2)^{e_\sigma}$, *wo* $c^2 \neq 1$, *u. s. w., wie in den Fällen 1—6 oben.*

Ist nun eine beliebige bilineare Form A gegeben, die von n Variabelenpaaren abhängt, so können wir nach Theorem XX eine Form R bilden, welche ebenfalls von n Variabelenpaaren abhängt und dieselben Kronecker'schen und Weierstrass'schen Invarianten besitzt, wie die gegebene Form. Nach Theorem XVIII sind daher die Formen A und R congruent, R ist aber eine reducirte Form, und daher *das Problem der Reduktion einer Form A mit cogredienten Variabelen vollständig gelöst,* da man jederzeit die congruenten Substitutionen wirklich bestimmen kann, die A in R überführen (73).

76. Gehören zu einer Form A mit cogredienten Variabelen die Invarianten

$$n_1^0,\ n_2^0, \ldots (\lambda_1 + c_1\lambda_2)^{e_1},\ (c_1\lambda_1 + \lambda_2)^{e_1}, \ldots (\lambda_1 + \lambda_2)^{\overset{+}{e}_\varrho}, \ldots (\lambda_1 + \lambda_2)^{\overline{e}_\sigma}, \ldots,$$

so sagen wir, die Form besitze die Charakteristik

$$[\{n_1^0,\ n_2^0, \ldots\}\ e_1,\ e_1, \ldots \overset{+}{e}_\varrho, \ldots \overline{e}_\sigma, \ldots].$$

Auf Grund des Theorems XX *klassificiren* wir nun die Formen mit $2n$ cogredienten Variabelen bei gegebenem n nach dem schon öfter angewandten Principe (29, 62, 70). Wir rechnen also zu derselben Klasse alle diejenigen von n Variabelenpaaren abhängigen Formen, welche dieselbe Charakteristik besitzen. U. s. w. Zu jeder Klasse gehört eine *Normalform,* die sich aus den Formen 1—6 oben zusammensetzt. Wie sich für ein gegebenes n die Anzahl der Klassen systematisch berechnen lässt, hat Rosenow angegeben.* Derselbe hat auch für die Fälle $n = 1, 2, 3, 4$ und $n = 10$ die Normalformen aufgestellt.**

* Rosenow, Ueber die Anzahl von Klassen bilinearer Formen. Wiss. Beil. zum Programme der vierten höheren Bürgerschule zu Berlin, Ostern 1891.

** Rosenow, Crelle's Journ. Bd. 108, S. 5—13 (für $n = 1-4$); Programm der eben genannten Anstalt, 1892, S. 8—21 ($n = 10$).

Um z.B. für $n = 1$ die Klassen zu bestimmen, hat man die Gleichung (3) für $n = 1$ zu lösen. Man hat zwei Lösungen

$$1. \quad n_1^0 = 1$$

$$2. \quad \overset{+}{e}_\sigma = 1.$$

Im 1. Falle wird $R = 0$.

Im 2. Falle wird $R = \overset{+}{U}_1$, wo in $\overset{+}{U}_1$

$$\overset{+}{e}_1 = 1$$

zu nehmen ist. Daher ist $R = x_0 y_0$.

U. s. w. Wir stellen im Folgenden die Charakteristiken und Normalformen für alle Klassen bilinearer Formen von $2n$ cogredienten Variabelen für die Fälle $n = 1, 2, 3, 4$ zusammen.

Klassen bilinearer Formen von $2n$ cogredienten Variabelen im Falle

a) $n = 1$.

1. $[\overset{+}{1}] : x_0 y_0$.
2. $\{1\} : 0$.

b) $n = 2$.

1. $[11] \quad : x_0 y_1 + c_1 x_1 y_0$.
2. $[\overset{-}{2}] \quad : x_0 y_0 + x_1 y_0 - x_0 y_1$.
3. $[\overset{-}{1}\,\overset{-}{1}] \quad : x_0 y_1 - x_1 y_0$.
4. $[\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}] \quad : x_0 y_0 + x_1 y_1$.
5. $[\{1\}\overset{+}{1}]$: } Die Normalformen sind mit denjenigen
6. $\{11\}$: } für $n = 1$ identisch.

c) $n = 3$.

1. $[\overset{+}{1}11] : x_0 y_0 + (x_1 y_2 + c_1 x_2 y_1)$.
2. $[\overset{+}{1}\,\overset{-}{2}] : x_0 y_0 + (x_1 y_1 + x_2 y_1 - x_1 y_2)$.
3. $[\overset{+}{1}\,\overset{-}{1}\,\overset{-}{1}] : x_0 y_0 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)$.
4. $[\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}] : x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2$.
5. $[\overset{+}{3}] \quad : x_0 y_0 + x_1 y_0 - x_0 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2$.
6. $\{3\} \quad : x_0 y_1 + x_1 y_2$.

Die Normalformen für die sechs übrigen Klassen sind identisch mit denjenigen für die Klassen bilinearer Formen, die von *zwei* Variabelenpaaren abhängen.

d) $n = 4$.

1. $[1\,1\,1\,1]$: $(x_0 y_1 + c_1 x_1 y_0) + (x_2 y_3 + c_2 x_3 y_2)$.
2. $[(11)(11)]$: $(x_0 y_1 + c_1 x_1 y_0) + (x_2 y_3 + c_1 x_3 y_2)$.
3. $[2\,2]$: $x_0 y_1 + c_1 x_1 y_0 + x_1 y_2 + c_1 x_2 y_1 + x_2 y_3 + c_1 x_3 y_2$.
4. $[\bar{2}\,1\,1]$: $(x_0 y_0 + x_1 y_0 - x_0 y_1) + (x_2 y_3 + c_1 x_3 y_2)$.
5. $[\bar{1}\,\bar{1}\,1\,1]$: $(x_0 y_1 - x_1 y_0) + (x_2 y_3 + c_1 x_3 y_2)$.
6. $[\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}\,1\,1]$: $x_0 y_0 + x_1 y_1 + (x_2 y_3 + c_1 x_3 y_2)$.
7. $[\bar{2}\,\bar{2}]$: $(x_0 y_0 + x_1 y_0 - x_0 y_1) + (x_2 y_2 + x_3 y_2 - x_2 y_3)$.
8. $[\bar{4}]$: $x_0 y_0 + x_1 y_0 - x_0 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_3 y_2 - x_2 y_3$.
9. $[\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{2}]$: $(x_0 y_1 - x_1 y_0) + (x_2 y_2 + x_3 y_2 - x_2 y_3)$.
10. $[\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}\,\bar{2}]$: $x_0 y_0 + x_1 y_1 + (x_2 y_2 + x_3 y_2 - x_2 y_3)$.
11. $[\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}]$: $x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.
12. $[\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}\,\bar{1}\,\bar{1}]$: $x_0 y_0 + x_1 y_1 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)$.
13. $[\overset{+}{1}\,\overset{+}{3}]$: $x_0 y_0 + (x_1 y_1 + x_2 y_1 - x_1 y_2 + x_3 y_2 + x_2 y_3)$.
14. $[\overset{+}{2}\,\overset{+}{2}]$: $x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2$.
15. $[\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}]$: $(x_0 y_1 - x_1 y_0) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)$.
16. $[\{3\}]\,\overset{+}{1}]$: $(x_0 y_1 + x_1 y_2) + x_3 y_3$. Singulär

Die Normalformen für die 12 übrigen Klassen stimmen mit denen für die Klassen bilinearer Formen von *drei* Variabelenpaaren bez. überein.

Es giebt also in den Fällen $n = 1, 2, 3, 4$ bez. $2, 6, 12, 28$ Klassen bilinearer Formen bei congruenter Transformation der Variabelen.

Die Formen der Klassen $[\overset{+}{1}]$, $[\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}]$, $[\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}]$, $[\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}]$, $[\{1\}\overset{+}{1}]$, ... sind *symmetrisch*, die der Klassen $[\bar{1}\,\bar{1}]$, $[\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}]$, $[\{1\}\bar{1}\,\bar{1}]$, ... *alternirend.*

α) Ist *allgemein* $A = \sum a_{ik} x_i y_k$ $(i, k = 1, 2, \dots n)$ symmetrisch, so ist

$$\lambda_1 \frac{\partial A}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial A'}{\partial y_i} = (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial A}{\partial y_i};$$

daher sind bei $|\lambda_1 A + \lambda_2 A'| \equiv 0$ die Zahlen m_i alle Null, also die Zahlen n_i^0 alle Eins. Da ferner hier

$$\lambda_1 a_{ik} + \lambda_2 a_{ki} = (\lambda_1 + \lambda_2) a_{ik}$$

ist, so besitzt das System von $|\lambda_1 A + \lambda_2 A'|$ nur ET mit Exponenten 1, und zwar r Stück, wenn $|A|$ und somit auch $\lambda_1 A + \lambda_2 A'|$ vom Range r ist. *Eine symmetrische bilineare Form*

$$A = \sum a_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

hat daher, wenn r den Rang von $|A|$ bedeutet, *die Charakteristik*

$$[\underbrace{\{1\,1\ldots 1\}}_{n-r \text{ Stück}}\underbrace{\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}\ldots\overset{+}{1}}_{r \text{ Stück}}],$$

lässt sich also durch congruente Transformationen stets auf die Form

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_r y_r$$

bringen. Hat umgekehrt eine Form vorstehende Charakteristik, so lässt sie sich congruent in $x_1 y_1 + \cdots + x_r y_r$ transformiren; sie ist also symmetrisch.

β) Analog zeigt man: *Eine alternirende, von n Variabelenpaaren abhängige bilineare Form*, deren Determinante vom Range $r = 2r'$ ist (9, c), *hat die Charakteristik*

$$[\underbrace{\{1\,1\ldots\}}_{n-r \text{ Stück}}\;\underbrace{\overline{1\,1}\,.\,\overline{1\,1}}_{2r' \text{ Stück}}],$$

lässt sich daher durch congruente Transformation in

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_4 - x_4 y_3) + \cdots + (x_{r-1} y_r - x_r y_{r-1})$$

überführen. Umgekehrt ist eine Form mit vorstehender Charakteristik eine alternirende.

Folgerungen: *19) Zwei symmetrische oder alternirende Formen sind dann und nur dann congruent, wenn ihre Determinanten gleichen Rang haben.*

Und: *20) Eine quadratische Form A kann in eine andere quadratische Form B, die von gleichvielen Variabelen abhängt, dann und nur dann durch eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante transformirt werden, wenn die Determinanten von A und B gleichen Rang haben* (63).

§ 11. Aehnliche und duale Formen.

77. Wir erledigen jetzt für solche Formen die analogen Fragen, die bei der congruenten Transformation der Formen auftraten.

Sind zwei Formen

$$A = \sum a_{ik} x_i u_k, \quad B = \sum b_{ik} x_i u_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

ähnlich, ist also eine lineare Substitution T vorhanden derart, dass symbolisch (13)

$$B = T^{-1} A T$$

ist, so hat man weiter für

$$E = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n$$

$$E = T^{-1} E T,$$

also bei beliebigen $\lambda_1 \mid \lambda_2$

$$\lambda_1 E + \lambda_2 B = T^{-1}(\lambda_1 E + \lambda_2 A) T;$$

die Schaaren $\lambda_1 E + \lambda_2 A$ und $\lambda_1 E + \lambda_2 B$ sind äquivalent, die ET von

$$|\lambda_1 E + \lambda_2 A| \quad \text{und} \quad |\lambda_1 E + \lambda_2 B|$$

stimmen überein. Hervorzuheben ist, dass (12, Gleich. (16)

$$|\lambda_1 E + \lambda_2 B| = |T^{-1}| \cdot |\lambda_1 E + \lambda_2 A| \cdot |T| = |\lambda_1 E + \lambda_2 A|.$$

Stimmen umgekehrt die ET der Determinanten zweier Schaaren

$$\lambda_1 E + \lambda_2 A \quad \text{und} \quad \lambda_1 E + \lambda_2 B$$

überein, so giebt es Substitutionen S, T derart, dass bei beliebigen $\lambda_1 \mid \lambda_2$

$$\lambda_1 E + \lambda_2 B = S(\lambda_1 E + \lambda_2 A) T$$

ist (Theorem VIII). Insbesondere ist für $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$

$$E = SET,$$

also

$$S = T^{-1}, \quad B = T^{-1} A T;$$

d. h. A und B sind ähnlich. Setzen wir vorstehend $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -1$, so ist $|\lambda E - A|$ die charakteristische Determinante von A, $|\lambda E - B|$ die von B (16), und es gilt daher das Theorem:

XXI. Zwei Formen sind dann und nur dann ähnlich, wenn die Elementartheiler ihrer charakteristischen Determinanten übereinstimmen.

Nimmt man in Theorem IX

$$g = 1, \quad h = 0, \quad a_\sigma = 1, \quad b_\sigma = c_\sigma, \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = -1,$$

so besagt dasselbe, dass die Determinante der Form

$$\lambda_1 \mathsf{A} - \mathsf{B} = \lambda \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} - \left\{ \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} + (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1} \right\}$$
$$\sigma = 1, 2, \ldots m$$

die ET

$$(\lambda - c_1)^{e_1}, \quad (\lambda - c_2)^{e_2}, \ldots (\lambda - c_m)^{e_m}$$

besitzt. Wir bezeichnen jetzt die Variabelen

$$X_{10}, X_{11}, \ldots X_{1, e_1 - 1}; \quad X_{20}, X_{21}, \ldots X_{2, e_2 - 1}; \ldots;$$
$$X_{m0}, X_{m1}, \ldots X_{m, e_m - 1}$$

der Reihe nach mit

$$x_1, x_2, \ldots x_{e_1}; \quad x_{e_1+1}, x_{e_1+2}, \ldots x_{e_1+e_2}; \ldots;$$
$$x_{e_1+e_2+\cdots+e_{m-1}+1}, \quad x_{e_1+e_2+\cdots+e_{m-1}+2}, \ldots x_n,$$

wo

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_m = n;$$

die Veränderlichen

$$Y_{10}, Y_{11}, \ldots Y_{1, e_1 - 1}; Y_{20}, Y_{21}, \ldots Y_{2, e_2 - 1}, \ldots; Y_{m0}, Y_{m1} \ldots Y_{m, e_m - 1}$$

bezeichnen wir ferner der Reihe nach mit

$$u_{e_1}, u_{e_1 - 1}, \ldots u_1; u_{e_1+e_2}, u_{e_1+e_2-1}, \ldots u_{e_1+1}; \ldots; u_n, u_{n-1}, \ldots u_{e_1+e_2+\cdots+e_{m-1}+1};$$

schreiben wir dann noch E für A, A für B, so wird

$$(1) \begin{cases} \mathsf{E} = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n, \\ \mathsf{A} = c_1 (x_1 u_1 + \cdots + x_{e_1} u_{e_1}) + c_2 (x_{e_1+1} u_{e_1+1} + \cdots + x_{e_1+e_2} u_{e_1+e_2}) + \cdots \\ \qquad + c_m (x_{n-e_m+1} u_{n-e_m+1} \cdot + x_n u_n) \\ \quad + \; (x_1 u_2 + \cdots + x_{e_1-1} u_{e_1})^{*} + (x_{e_1+1} u_{e_1+2} + \cdots + x_{e_1+e_2-1} u_{e_1+e_2}) + \cdots \\ \qquad + (x_{n-e_m+1} u_{n-e_m+2} + \cdots + x_{n-1} y_n). \end{cases}$$

Da nun, wie oben gezeigt wurde, $|\lambda_1 \mathsf{E} - \mathsf{A}|$ die ET

$$(\lambda - c_\sigma)^{e_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots m)$$

besitzt, so haben wir in A eine von n Variabelenpaaren abhängige Form, die, wenn bei gegebenem n die ganzen positiven Zahlen e_1, $e_2, \ldots e_m$ eine beliebige Lösung der Gleichung: $e_1 + e_2 + \cdots + e_m = n$ vorstellen und die Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_m$ willkürlich, aber endlich gewählt sind, eine charakteristische Determinante mit den ETn

$$(\lambda - c_\sigma)^{e_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots m)$$

hat. Wir können dieses Resultat so aussprechen:

XXII. Es giebt Formen, die von einer vorgeschriebenen Anzahl von Variabelenpaaren abhängen, und deren charakteristische Determinanten vorgeschriebene Elementartheiler besitzen.

Eine bilineare Form mit contragredienten Variabelen heisst eine elementare oder irreducibele, wenn sie weder zerlegbar noch einer zerlegbaren Form ähnlich ist. U. s. w., wie in 25.

---

* Dieser Klammerausdruck bleibt weg, wenn $e_1 = 1$ ist, der folgende, wenn $e_2 = 1$ ist, u. s. w.

Die Form A oben ist zerlegbar, die charakteristischen Determinanten ihrer einzelnen Theile besitzen nur je *einen* ET; daher sind diese Theile selbst irreducibel (48, Schluss). Also ist A eine *reducirte Form*, wenn die x_i, u_i als contragrediente Variabele aufgefasst werden.

Eine beliebige gegebene Form A kann in eine reducirte Form A transformirt werden, die zu ihr ähnlich ist; die nöthigen Substitutionen liefert die Weierstrass'sche Theorie, wenn man sie auf die Schaar $\lambda_1 E + \lambda_2 A$ anwendet. Man erhält nämlich Substitutionen S, T derart, dass bei unserer jetzigen Bezeichnung

$$\lambda_1 E + \lambda_2 \mathsf{A} = S(\lambda_1 E + \lambda_2 A) T$$

wird bei beliebigen $\lambda_1 \mid \lambda_2$; es ist dann

$$E = SET, \quad S = T^{-1};$$

d. h. S und T sind ähnliche Transformationen. Man kann auch zuerst auf Grund der Theoreme XXI und XXII eine zur gegebenen Form A ähnliche reducirte Form A herstellen und dann aus den Koefficienten von A und A die nöthigen Substitutionen $T^{-1}\,T$ rational berechnen (S. 66—67). — Damit ist die *Reduktion einer gegebenen bilinearen Form mit contragredienten Variabelen* wirklich durchgeführt.

A ist irreducibel, wenn $|\lambda E - A|$ nur *einen* ET besitzt; besitzt $|\lambda E - A|$ mehr als einen ET, so können wir eine zerlegbare Form A herstellen, die zu A ähnlich ist, d. h. A ist reducibel. Also:

Eine bilineare Form mit contragredienten Variabelen ist dann und nur dann irreducibel, wenn ihre charakteristische Determinante einen einzigen Elementartheiler besitzt.

78. Wir nennen die Charakteristik der Schaar $\lambda_1 E + \lambda_2 A$ die Charakteristik der bilinearen Form

$$A = \sum a_{ik} x_i u_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

mit contragredienten Variabelen und klassificiren die von einer gegebenen Anzahl von contragredienten Variabelen abhängigen bilinearen Formen nach dem des öfteren angewandten Principe. Die *Normalformen* der einzelnen Klassen kann man für die Fälle $n = 1, 2, 3, 4$ aus 50 entnehmen, indem man daselbst in jeder zweiten Form eines Paares von Normalformen die oben angegebenen Umbezeichnungen vornimmt (77). Man hat folgende

Klassen bilinearer Formen von $2n$ contragredienten Variabelen im Falle

a) $n = 1$.

1. $[1] : c_1 x_1 u_1$.

b) $n = 2$.

1. $[1\,1]$: $c_1 x_1 u_1 + c_2 x_2 u_2$.
2. $[(1\,1)]$: $c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2)$.
3. $[2]$: $c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2) + x_1 u_2$.

c) $n = 3$.

1. $[1\,1\,1]$: $c_1 x_1 u_1 + c_2 x_2 u_2 + c_3 x_3 u_3$.
2. $[(1\,1)\,1]$: $c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2) + c_3 x_3 u_3$.
3. $[(1\,1\,1)]$: $c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3)$.
4. $[2\,1]$: $c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2) + c_2 x_3 u_3 + x_1 u_2$.
5. $[(2\,1)]$: $c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) + x_1 u_2$.
6. $[3]$: $c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) + (x_1 u_2 + x_2 u_3)$.

d) $n = 4$.

1. $[1\,1\,1\,1]$: $c_1 x_1 u_1 + c_2 x_2 u_2 + c_3 x_3 u_3 + c_4 x_4 u_4$.
2. $[(1\,1)\,1\,1]$: $c_1 = c_2$, sonst wie die Normalform 1.
3. $[(1\,1)(1\,1)]$: $c_1 = c_2$, $c_3 = c_4$, „ „ „ „ 1.
4. $[(1\,1\,1)\,1]$: $c_1 = c_2 = c_3$, „ „ „ „ 1.
5. $[(1\,1\,1\,1)]$: $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$, „ „ „ „ 1.
6. $[2\,1\,1]$: $c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2) + c_2 x_3 u_3 + c_3 x_4 u_4 + x_1 u_2$.
7. $[(2\,1)\,1]$: $c_1 = c_2$, sonst wie Normalform 6.
8. $[2\,(1\,1)]$: $c_2 = c_3$, „ „ „ 6.
9. $[(2\,1\,1)]$: $c_1 = c_2 = c_3$, „ „ „ 6.
10. $[2\,2]$: $c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2) + c_2(x_3 u_3 + x_4 u_4) + x_1 u_2 + x_3 u_4$.
11. $[(2\,2)]$: $c_1 = c_2$, sonst wie Normalform 10.
12. $[3\,1]$: $c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) + c_2 x_4 u_4 + (x_1 u_2 + x_2 u_3)$.
13. $[(3\,1)]$: $c_1 = c_2$, sonst wie Normalform 12.
14. $[4]$: $c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4)$
$+ (x_1 u_2 + x_2 u_3 + x_3 u_4)$.

79. Nun sei durch

$$\xi_i = a_{1i} x_1 + a_{2i} x_2 + \cdots + a_{ni} x_n \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

eine *lineare Substitution* gegeben, deren Determinante nicht unbedingt von Null verschieden zu sein braucht. Alsdann nennt man die Determinante

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \ldots\ldots & -a_{nn} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \ldots\ldots & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} \ldots\ldots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

die charakteristische Determinante der linearen Substitution (2). Gleich Null gesetzt liefert sie die charakteristische Gleichung der linearen Substitution (2).

Es sei nun

$$(4)\qquad x_i = b_{1i}x'_1 + b_{2i}x'_2 + \cdots + b_{ni}x_n \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

eine zweite lineare Substitution, deren Determinante *nicht* Null sein darf. Wir setzen weiter

$$(5)\qquad \xi_i = b_{1i}\xi'_1 + b_{2i}\xi'_2 + \cdots + b_{ni}\xi'_n \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

und führen die congruenten Substitutionen (4) und (5) in (2) aus. Hierauf lösen wir die transformirten Gleichungen nach den ξ_i auf; wir erhalten dann eine neue lineare Substitution, die durch

$$(6)\qquad \xi'_i = c_{1i}x'_1 + c_{2i}x'_2 + \cdots + c_{ni}x'_n \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

gegeben sei. Geht eine Substitution (2) auf die eben beschriebene Weise durch lineare Substitution in eine Substitution (6) über, so nennen wir die Substitutionen (2) und (6) äquivalent.

Wir setzen jetzt

$$\left.\begin{array}{l} a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + \cdots + a_{nk}x_n = f(x)_k \\ c_{1k}x'_1 + c_{2k}x'_2 + \cdots + c_{nk}x_n = g(x')_k \end{array}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

und bilden die bilinearen Formen

$$A = \sum u_k f(x)_k = \sum a_{ik}x_i u_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

$$G = \sum u'_k g(x')_k = \sum c_{ik}x'_i u'_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Die charakteristische Determinante der Substitution (2) ist identisch mit derjenigen der bilinearen Form A; das Gleiche gilt für die Substitution (6) und die Form G.

Geht nun durch die lineare Substitution (4) $f(x)_i$ in $f'(x')_i$ über, so wird A durch (4) in

$$(7)\qquad \sum u_k f'(x')_k$$

übergeführt; setzen wir nun noch in (7)

$$(8)\qquad u'_i = b_{i1}u_1 + b_{i2}u_2 + \cdots + b_{in}u_n \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

so erhalten wir

$$\sum u'_k g(x')_k = \sum c_{ik}x'_i u'_k = G.$$

Nun sind aber vermöge (4) und (8) die Variabelen x_i und u_i contragredient; daher sind A und G ähnliche Formen, weshalb die Sub-

stitutionen A und G, d. h. die Substitutionen (2) und (6) (vergl. 11) auch **ähnliche Substitutionen** genannt werden. Die charakteristischen Determinanten der Substitutionen (2) und (6) sind aber bez. identisch mit denen der Formen A und G. Also gilt nach Theorem XXI der Satz:

XXIII. **Zwei lineare Substitutionen sind dann und nur dann äquivalent, wenn die Elementartheiler ihrer charakteristischen Determinanten übereinstimmen.**

Aus dem Theorem XXII folgt ohne weiteres, da $|\lambda E - A|$ mit (3) identisch ist:

XXIV. **Man kann für ein gegebenes n lineare Substitutionen (2) aufstellen, deren charakteristische Determinanten vorgeschriebene Elementartheiler besitzen.**

Gehören zur Determinante (3) die ET

(9) $$(\lambda - c_\sigma)^{e_\sigma} \quad (\sigma = 1, 2, \dots m),$$

so sagen wir, die lineare Substitution (2) habe die **Charakteristik**

$$[(e_1, \dots) \dots (e_\sigma, \dots) \dots]$$

und *klassificiren* — unter Zugrundelegung des eben eingeführten Aequivalenzbegriffes — in bekannter Weise die linearen Substitutionen (2) bei gegebenem n. Die *Normalformen* für die einzelnen Klassen entnimmt man im Falle $n = 1, 2, 3, 4$ unmittelbar aus 78.

Man hat z. B. für $n = 3$:

1. $[1\,1\,1]$: $\xi_1 = c_1 x_1$, $\xi_2 = c_2 x_2$, $\xi_3 = c_3 x_3$.

2. $[(1\,1)]\,1$: Normalform, wie bei 1., aber $c_1 = c_2$.

3. $[(1\,1\,1)]$: „ , „ „ 1., „ $c_1 = c_2 = c_3$.

4. $[2\,1]$: $\xi_1 = c_1 x_1$, $\xi_2 = x_1 + c_1 x_2$, $\xi_3 = c_2 x_3$.

5. $[(2\,1)]$: Normalform, wie bei 4., aber $c_1 = c_2$.

6. $[3]$: $\xi_1 = c_1 x_1$, $\xi_2 = x_1 + c_1 x_2$, $\xi_3 = x_2 + c_1 x_3$.

Allgemein wird, wenn (3) die ET (9) besitzt, *die Normalform von (2) gleich:*

$$\begin{array}{lll}
\xi_1 = c_1 x_1 \qquad\qquad , & \xi_{e_1+1} = c_2 x_{e_1+1} \qquad\qquad , & \ldots \; \xi_{n-e_m+1} = c_m x_{n-e_m+1}, \\
\xi_2 = \quad x_1 + c_2 x_2, & \xi_{e_1+2} = \quad x_{e_1+1} + c_2 x_{e_1+2}, & \ldots \; \xi_{n-e_m+2} = x_{n-e_m+1} + c_m x_{n-e_m+2}, \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\xi_{e_1} = x_{e_1-1} + c_1 x_{e_1}, & \xi_{e_1+e_2} = x_{e_1+e_2-1} + c_2 x_{e_1+e_2}, & \ldots \; \xi_n \qquad = x_{n-1} \quad + c_m x_n,^*
\end{array}$$

wobei die Anmerkung S. 153 zu berücksichtigen ist.

80. Die vorstehenden Betrachtungen über lineare Substitutionen lassen sich noch etwas allgemeiner gestalten. Man definirt nämlich eine lineare Substitution auch wie folgt: Es seien

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \sum a_{ik} x_i u_k = \sum u_i \varphi(x)_i \\ \psi &= \sum b_{ik} x_i u_k = \sum u_i \psi(x)_i \end{aligned}\right\} \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

zwei bilineare Formen von je $2n$ Variabelen; die Determinante von ψ sei nicht Null. Dann ist durch die n Gleichungen

$$(10) \qquad \psi(\xi)_i = \varphi(x)_i \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

eine lineare Substitution gegeben; man erhält sie in expliciter Form, durch Auflösung der n Gleichungen nach den ξ_i. Es werde alsdann etwa

$$(11) \qquad \xi_i = c_{1i} x_1 + c_{2i} x_2 + \cdots + c_{ni} x_n \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Die Determinante $|\lambda_1 \psi + \lambda_2 \varphi|$ heisst die **charakteristische Determinante der linearen Substitution** (10). Sind ihre ET gleich $(b_\sigma \lambda_1 + a_\sigma \lambda_2)^{e_\sigma}$ $(\sigma = 1, 2, \ldots m)$, so sagt man, die Substitution habe die **Charakteristik** $[(e_1, \ldots) \ldots (e_\sigma, \ldots) \ldots]$.

Setzt man nun in (10)

$$\left.\begin{aligned} &(12) \qquad x_i = s_{1i} x_1' + s_{2i} x_2' + \cdot + s_{ni} x_n' \\ &(13) \qquad \xi_i = s_{1i} \xi_1' + s_{2i} \xi_2' + \cdot + s_{ni} \xi_n' \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

wo die Determinante $\sum \pm s_{11} s_{22} \ldots s_{nn} \neq 0$

ist, und componirt das erhaltene System von n Gleichungen n-mal mit irgend welchen n^2 Grössen

$$t_{1i}, t_i, \ldots t_{ni} \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

deren Determinante nicht Null sei, so erhält man n lineare Gleichungen von der Gestalt

$$(14) \qquad \overline{\psi}(\xi')_i = \overline{\varphi}(x')_i \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Setzt man nun weiter

$$(15) \qquad u_i = t_{i1} u_1' + t_{i2} u_2' + \cdots + t_{in} u_k' \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

dann geht durch die linearen Substitutionen (12) und (15) die Form φ in $\overline{\varphi} = \sum \overline{\varphi}(x')_i u_i$, die Form ψ in $\overline{\psi} = \sum \overline{\psi}(x')_i u_i'$ über. Da nun

---

* Vergl. Netto, Acta math. Bd. 17, S. 45.

die Determinante $|\psi|$ nicht Null ist, und ebenso die Determinanten der Substitutionen (12) und (15) von Null verschieden sind, so ist auch $|\overline{\psi}|$ nicht Null. Die Determinante $|\overline{\psi}|$ ist aber identisch mit derjenigen der n linearen Formen $\overline{\psi}(\xi')_i$ in (14). Also ist auch durch (14) eine lineare Substitution gegeben, die explicite

(16) $$\xi'_i = c'_{1i}x'_1 + c'_{2i}x'_2 + \cdots + c'_{ni}x'_n$$

lauten möge.

Geht eine Substitution (10) auf die beschriebene Weise durch Substitution und Komposition — oder auch umgekehrt, da es auf die Reihenfolge dieser Operationen nicht ankommt — in eine Substitution (14) über, so heissen die beiden Substitutionen (10) und (14) äquivalent.

Da die charakteristischen Determinanten der Substitution (10) und (14) mit den Determinanten der Schaaren $\lambda_1\psi + \lambda_2\varphi$ und $\lambda_1\overline{\psi} + \lambda_2\overline{\varphi}$ bez. identisch sind, so folgt aus den Weierstrass'schen Theoremen, *dass die Sätze XXIII und XIV auch bei dieser Definition der linearen Substitutionen und der Aequivalenz zweier linearer Substitutionen Wort für Wort giltig bleiben;* ebenso m.m. das Folgende in 79.

Für $\psi = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n$, für $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -1$ und für den Fall, dass die Substitutionen (12) und (15) ähnliche sind, gehen diese Betrachtungen, die namentlich in neueren geometrischen Arbeiten der italienischen Mathematiker (Segre, Calò, Predella u.A.) über die Collineationen zur Verwendung kommen, in diejenigen des vorigen Artikels über.

81. Sind A und B *duale Formen*, so sind B' und A ähnlich (13), also die ET von $|\lambda E - B'|$ und $|\lambda E - A|$ dieselben (Theorem XXI); nun ist aber die Determinante $|\lambda E - B'|$ mit der Determinante $|\lambda E - B|$ identisch; also stimmen die ET von $|\lambda E - A|$ und von $|\lambda E - B|$ überein. Auch das Umgekehrte ist giltig. Also:

XXV. Zwei Formen sind dann und nur dann dual, wenn die Elementartheiler ihrer charakteristischen Determinanten übereinstimmen.

Mit Rücksicht auf Theorem XXI gilt also der Satz:

21) Aehnliche Formen sind stets auch dual, und umgekehrt.

Endlich folgt aus XXV:

22) Jede bilineare Form mit contragredienten Variabelen ist zu sich selbst dual.

Die Resultate dieses Paragraphen werden im Folgenden vielfache Verwendung finden. Zunächst erledigen wir die Frage, welche besondere Beschaffenheit lineare Substitutionen haben müssen, um geeignet zu sein, eine bilineare Form in sich selbst zu transformiren auf Grund unserer Untersuchungen über congruente und ähnliche Formen.

§ 12. Lineare Transformationen der bilinearen Formen in sich selbst.*

1. Transformationen ohne weitere Beschränkung.

82. a) Es gehe die bilineare Form

$$A = \sum a_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

durch die linearen Substitutionen** P und Q in sich selbst über, es sei also symbolisch

$$cA = PAQ,$$

wo c eine Konstante bedeutet, die weder Null noch unendlich ist. Setzt man

$$\frac{1}{\sqrt{c}} P = P_0, \quad \frac{1}{\sqrt{c}} Q = Q_0,$$

so ist

$$P_0 A Q_0 = \frac{PAQ}{c} = A;$$

es besteht also dann immer eine symbolische Gleichung

(1) $$A = PAQ,$$

wenn wir wieder P für P_0, Q für Q_0 schreiben.***

Sind nun U und V zwei ordinäre Formen, so folgt aus (1)

$$(UPU^{-1})(UAV)(V^{-1}QV) = UAV$$

oder, wenn

$$UAV = A_1, \quad UPU^{-1} = P_1, \quad V^{-1}QV = Q_1$$

gesetzt wird,

$$P_1 A_1 Q_1 = A_1.$$

Geht also A durch zwei beliebige Substitutionen U, V in A_1 über, durch zwei Substitutionen P, Q aber in sich selbst, so wird A_1 durch zwei zu P und Q ähnliche Substitutionen P_1, Q_1 in sich selbst transformirt.

b) Sei wieder $A = PAQ$, ferner $E = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots x_n y_n$, dann ist

$$(\lambda_1 E + \lambda_2 P) A Q = \lambda_1 A Q + \lambda_2 PAQ = \lambda_1 AQ + A\lambda_2 = A(\lambda_1 Q + \lambda_2 E);$$

hieraus folgt für den Fall, dass $|A| \neq 0$ ist,

$$\lambda_1 Q + \lambda_2 E = A^{-1}(\lambda_1 E + \lambda_2 P) A Q$$

bei beliebigen $\lambda_1 | \lambda_2$. *Die Schaaren* $\lambda_1 E + \lambda_2 P$ *und* $\lambda_1 Q + \lambda_2 E$ *sind also äquivalent.* Umgekehrt: Sind diese Schaaren äquivalent, so giebt es Substitutionen A und B derart, dass

---

* Vergl. zu diesem Paragraphen: Frobenius, Crelle's Journ. (78) Bd. 84, S. 29 ff.

** Mit nicht verschwindenden Determinanten. So immer im Flgd., wenn nichts Näheres bemerkt ist.

*** In der Theorie der linearen Substitutionen werden zwei Substitutionen P und cP als nicht wesentlich verschieden betrachtet. Dieses ist auch später bei den Betrachtungen über die orthogonalen und cyklischen Substitutionen zu beachten.

$$\lambda_1 E + \lambda_2 P = A(\lambda_1 Q + \lambda_2 E) B$$

ist, wo A und B nicht von $\lambda_1 | \lambda_2$ abhängen und $|A| \neq 0$, $B \neq 0$ ist. Daher ist

$$AQB = E, \quad AB = P,$$

$$(PAQ)B = P(AQB) = PE = P = AB$$

und weiter

$$PAQ = A.$$

Also gilt der Satz:

23) Zwei Substitutionen P und Q sind dann und nur dann geeignet eine ordinäre bilineare Form in sich selbst zu transformiren, wenn die Schaaren $\lambda_1 E + \lambda_2 P$ und $\lambda_1 Q + \lambda_2 E$ äquivalent sind.

Ist also in ET zerlegt etwa

(2) $$|\lambda_1 E + \lambda_2 P| = (\lambda_1 + c_1\lambda_2)^{e_1} (\lambda_1 + c_2\lambda_2)^{e_2} \ldots (\lambda_1 + c_m\lambda_2)^{e_m},$$

dann hat man für $|\lambda_1 Q + \lambda_2 E|$ nach Theorem VIII folgende Zerlegung in ET

$$|\lambda_1 Q + \lambda_2 E| = |Q| \cdot (\lambda_1 + c_1\lambda_2)^{e_1} (\lambda_1 + c_2\lambda_2)^{e_2} \ldots (\lambda_1 + c_m\lambda_2)^{e_m}.$$

Vertauscht man nun in der letzten Gleichung λ_1 mit λ_2, setzt alsdann $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -1$, so erhält man, da

$$|Q| \cdot c_1^{e_1} \cdot c_2^{e_2} \ldots c_m^{e_m} = 1$$

ist, in ET zerlegt

(3) $$|\lambda E - Q| = \left(\lambda - \frac{1}{c_1}\right)^{e_1} \left(\lambda - \frac{1}{c_2}\right)^{e_2} \cdots \left(\lambda - \frac{1}{c_m}\right)^{e_m}.$$

Setzt man aber in (2) $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -1$ und vergleicht die so erhaltene Gleichung mit (3), so ergiebt sich das Theorem:*

XXVI. **Damit zwei Substitutionen P und Q geeignet seien, eine ordinäre bilineare Form in sich selbst zu transformiren, ist nothwendig und hinreichend, dass die Elementartheiler ihrer charakteristischen Determinanten einander so zugeordnet werden können, dass die entsprechenden von gleichem Grade sind und für reciproke Werthe von λ verschwinden.**

83. Es sei nun A eine singuläre bilineare Form, $|A|$ sei vom Range r und P, Q seien Substitutionen, welche A in sich selbst transformiren. Wir setzen

$$E_1 = x_1 y_1 + \cdots + x_r y_r, \quad E_2 = x_{r+1} y_{r+1} + \cdots + x_n y_n,$$

sodass also

(4) $$E = E_1 + E_2$$

ist. Alsdann bestehen die Gleichungen

(5) $$E_1^2 = E_1, \quad E_2^2 = E_2, \quad E_1 E_2 = E_2 E_1 = 0.$$

Die Form A lässt sich so in $\bar{A}$ transformiren, dass $n - r$ Variabelenpaare wegfallen (vergl. 53, Schluss); als Form von r Variabelenpaaren

* Frobenius, l. c. S. 31.

ist $\bar{A}$ ordinär, lässt sich also in $x_1 y_2 + x_2 y + \cdots + x_r y_r$ transformiren, wie an sich klar ist. Es giebt daher Substitutionen U, V derart, dass

$$E_1 = UAV$$

ist, und daher giebt es nach 82 a) zwei zu P und Q bez. ähnliche Substitutionen P_0, Q_0, die E_1 in sich selbst transformiren; wir haben also eine Gleichung

$$P_0 E_1 Q_0 = E_1,$$

aus der wegen (5) die Gleichungen

$$(6) \qquad (E_1 P_0 E_1)(E_1 Q_0 E_1) = E_1, \quad (E_\varrho P_0 E_1)(E_1 Q_0 E_\sigma) = 0$$

folgen, wo ϱ, $\sigma = 1, 2$ sind, aber nicht gleichzeitig gleich 1 sein dürfen. Setzt man kurz allgemein

$$E_\varrho P_0 E_\sigma = P_{\varrho\sigma}, \quad E_\varrho Q_0 E_\sigma = Q_{\varrho\sigma},$$

so hat man daher nach (6)

$$(7) \qquad P_{11} Q_{11} = E_1, \quad P_{\varrho 1} Q_{1\sigma} = 0;$$

dabei ist P_{11} der Theil von P_0, welcher die Variabelen

$$x_1, \ldots x_r, \quad y_1, \ldots y_r$$

enthält, P_{12} derjenige, der die Variabelen

$$x_1, \ldots x_r, \quad y_{r+1}, \ldots y_n,$$

P_{21} derjenige, welcher die Variabelen

$$x_{r+1}, \ldots x_n, \quad y_1, \ldots y_r$$

enthält, u. s. w.; Analoges gilt von Q_{11}, Q_{12}, ...

Nun ist für die Formen P_{11}, Q_{11}, aufgefasst als Funktionen der Variabelen $x_1, \ldots x_r$, $y_1, \ldots y_r$, wegen (7)

$$|P_{11} Q_{11}| = |P_{11}| \cdot |Q_{11}| = 1;$$

also ist

$$|P_{11}| \neq 0, \quad |Q_{11}| \neq 0.$$

Ferner folgt aus der Gleichung $P_{11} Q_{12} = 0$, da $|P_{11}| \neq 0$ ist,

$$Q_{12} = 0.$$

Die Gleichung $P_{11} Q_{12} = 0$ repräsentirt nämlich das Gleichungssystem

$$(8) \qquad p_{\mu 1} q_{1\nu} + p_{\mu 2} q_{2\nu} + \cdots + p_{\mu r} q_{r\nu} = 0$$

für $\mu = 1, 2, \ldots r$, $\nu = r + 1, r + 2, \ldots n$ nach Satz a) in 22 und Gleich. (5) in 10, wenn

$$P_{11} = \sum p_{ik} x_i y_k, \quad Q_{12} = \sum q_{ik} x_i y_k$$

gesetzt wird. Nimmt man aber für ein bestimmtes ν in (8) der Reihe nach

$$\mu = 1, 2, \ldots r,$$

so hat man für $q_{1\nu}, \ldots q_{r\nu}$ als Unbekannte r homogene Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante $\sum \pm p_{11}, p_{22} \ldots p_{rr}$; daher muss

$$q_{1\nu} = q_{2\nu} = \cdots = q_{r\nu} = 0$$

sein. Dies gilt für $\nu = r + 1, \ldots n$, d. h. Q_{12} ist identisch Null. Analog zeigt man, dass wegen $| Q_{11} | \neq 0$ aus der Gleichung $P_{21} Q_{11} = 0$

$$P_{21} = 0$$

sich ergiebt.

Wegen $P_{21} = 0$ hat man aber

(9) $$| \lambda E - P | = | \lambda E_1 - P_{11} | \cdot | \lambda E_2 - P_{22} |,$$

wegen $Q_{12} = 0$

(10) $$| \lambda E - Q | = | \lambda E_1 - Q_{11} | \cdot | \lambda E_2 - Q_{22} |.$$

Aus (7) folgt weiter

$$Q_{11} = P_{11}^{-1};$$

Q_{11} ist also eine rationale Funktion von P_{11} (15); sind daher $c_1, c_2, \ldots c_r$ die Wurzeln der Gleichung

$$| \lambda E_1 - P_{11} | = 0,$$

so sind nach 16, Schluss

$$\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \cdots \frac{1}{c_r}$$

die Wurzeln der Gleichung

$$| \lambda E_1 - Q_{11} | = 0.$$

Nach (9) und (10) sind aber $c_1, c_2, \ldots c_r$ auch Wurzeln von $| \lambda E - P |$ und $\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \cdots \frac{1}{c_r}$ auch solche von $| \lambda E - Q |$. Also gilt der Satz:

24) Ist A singulär, $| A |$ vom Range r, und sind P, Q Substitutionen, die A in sich selbst transformiren, so besitzen die charakteristischen Gleichungen von P und Q r reciproke Wurzeln.

Folgerung: Ist die Gesammtzahl der reciproken Wurzeln dieser Gleichungen r', so ist

$$r \leqq r'.$$

Oder in Worten:

25) Wird eine Form durch zwei Substitutionen in sich selbst transformirt, so kann der Rang ihrer Determinante nicht grösser sein, als die Anzahl der reciproken Wurzeln, welche ihre charakteristischen Gleichungen haben.

Daraus folgt aber sofort der für uns sehr *wichtige* Satz:

26) Wird eine Form durch zwei Substitutionen in sich selbst transformirt, deren charakteristische Gleichungen keine reciproken Wurzeln haben, so muss sie identisch verschwinden.

2. Congruente Transformationen allgemeiner Formen.

84. Die Form A gehe durch die congruenten Substitutionen P', P in sich selbst über; dann können wir wieder symbolisch geradezu

(11) $$A = P'AP$$

setzen (vergl. 82, Anfang).

Ist nun G eine beliebige Form, ist ferner $|G| \neq 0$, so folgt aus (11) $$(G'P'G'^{-1})(G'AG)(G^{-1}PG) = G'AG;$$

setzt man hierin $$G'AG = A_0, \quad G^{-1}PG = P_0,$$

aus welch' letzterer Gleichung
$$G'P'G'^{-1} = P'_0$$

folgt, so erhält man $$P'_0 A_0 P_0 = A_0.$$

Wenn eine Substitution P eine Form A in sich selbst transformirt, so transformirt jede zu P ähnliche Substitution eine zu A congruente Form in sich selbst.

Ist $|A| \neq 0$, so ist vorstehend auch $A_0 \neq 0$; ist A symmetrisch oder alternirend, so gilt das Gleiche von A_0.

Aus $A = P'AP$ folgt ferner
$$(\lambda_1 E + \lambda_2 P')AP = A(\lambda_1 P + \lambda_2 E);$$

ist daher $|A| \neq 0$, so sind die Schaaren $\lambda_1 E + \lambda_2 P'$ und $\lambda_1 P + \lambda_2 E$ äquivalent; nach Theorem VIII sind aber auch die Schaaren $\lambda_1 E + \lambda_2 P'$ und $\lambda_1 E + \lambda_2 P$ äquivalent; deshalb sind auch die Schaaren $\lambda_1 P + \lambda_2 E$ und $\lambda_1 E + \lambda_2 P$ äquivalent. Daher gilt der Satz* (vergl. den Beweis von Satz XXVI in 82):

XXVII. **Damit eine Substitution geeignet sei, eine ordinäre bilineare Form in sich selbst zu transformiren, ist nothwendig und hinreichend, dass die Elementartheiler ihrer charakteristischen Determinante paarweise von gleichem Grade sind und für reciproke Werthe von λ verschwinden, mit Ausnahme derjenigen, welche zur Basis $(\lambda+1)$ oder $(\lambda-1)$ gehören.**

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch einen Satz aufführen, der sich auf die Transformation einer *singulären* Form in sich selbst bezieht, obwohl derselbe keine weitere Verwendung findet. Er folgt unmittelbar aus Satz 24 in 83 für $Q = P$, $P = P'$ und lautet:

27) Ist A singulär, $|A|$ vom Range r, und geht A durch die lineare Substitution P in sich selbst über, so ist die charakteristische Determinante von P durch eine reciproke Funktion r^{ten} Grades theilbar.

85. Im Folgenden bedürfen wir noch gewisser Betrachtungen über *zerlegbare Substitutionen.*

---

* Frobenius, l. c. S. 34

Sei $P'AP = A$ und P in die Theile P_1, P_2 zerlegbar; P_1 enthalte die Variabelen
$$x_\mu,\ y_\mu\ (\mu = 1,\ 2, \ldots m),$$
P_2 die Variabelen
$$x_\nu,\ y_\nu\ \ (\nu = m+1,\ m+2, \ldots n).$$
Setzen wir dann
$$E_1 = \sum x_\mu y_\mu\ \ (\mu = 1,\ 2, \ldots m),$$
$$E_2 = \sum x_\nu y_\nu\ \ (\nu = m+1,\ m+2, \ldots n),$$
so ist für $\varrho = 1,\ 2$
$$P_\varrho = E_\varrho P = PE_\varrho = E_\varrho P E_\varrho = E_\varrho P_\varrho = P_\varrho E_\varrho.$$
Aus $P'AP = A$ folgt daher, da P' und P in gleicher Weise zerlegbar sind (22), für $\varrho,\ \sigma = 1,\ 2$
$$E_\varrho A E_\sigma = E_\varrho(P'AP)E_\sigma = (E_\varrho P')A(PE_\sigma) = (P'_\varrho E_\varrho)A(P_\sigma E_\sigma),$$
oder, wenn
$$E_\varrho A E_\sigma = A_{\varrho\sigma}$$
gesetzt wird,
$$P'_\varrho A_{\varrho\sigma} P_\sigma = A_{\varrho\sigma}.$$

Wir machen nunmehr die weitere Annahme, dass keine Wurzel der charakteristischen Gleichung von P_1 zu einer Wurzel derjenigen von P_2 reciprok ist. Die charakteristischen Gleichungen von P_1 und P'_1, ebenso die von P_2 und P'_2 sind aber identisch; aus der Gleichung
$$P'_1 A_{12} P_2 = A_{12}$$
folgt daher
$$A_{12} = 0,$$
aus der Gleichung
$$P'_2 A_{21} P_1 = A_{21}$$
$$A_{21} = 0$$
nach Satz 26) in 83. Die Gleichungen $A_{12} = A_{21} = 0$ besagen, dass A in die Theile A_{11} und A_{22} zerlegbar ist (vergl. 83). Also:

28) Wird eine Form durch eine zerlegbare Substitution in sich selbst transformirt, und haben die charakteristischen Gleichungen der beiden Theile der Substitution keine reciproken Wurzeln, so ist die Form in derselben Weise zerlegbar, wie die Substitution.

Noch zum Schlusse eine für das Folgende wichtige Bemerkung! Ist $|A| \neq 0$, und man setzt
$$U = A^{-1}A',$$
so ist
$$U' = AA'^{-1},$$
$$U'AU = (AA'^{-1})\,A(A^{-1}A') = A.$$
Jede ordinäre Form A wird also durch die Substitution
$$A^{-1}A'$$
in sich selbst transformirt.

3. Congruente Transformationen der symmetrischen und alternirenden Formen.

86. Wir beweisen zunächst den Satz:

29) Jede Substitution U, welche eine symmetrische Form S [alternirende Form T] mit nicht verschwindender Determinante in sich selbst überführt, und für welche die Determinante von $E+U$ [$E-U$] nicht Null ist, lässt sich, und zwar in nur einer Weise, auf die Gestalt

(12) $$U=(S+T)^{-1}(S-T)$$

bringen, wo

(13) $$T=S\frac{E-U}{E+U}\quad\left[S=T\frac{E+U}{E-U}\right]$$

eine alternirende [symmetrische] Form bedeutet.

Seien zunächst S und T beliebige Formen, sei $|S+T|\neq 0$ und U durch (12) definirt. Dann ist wegen (12)

$$(S+T)(E+U)=S+T+(S+T)U=S+T+S-T,$$

(14) $$(S+T)(E+U)=2S;$$

analog findet man

(15) $$(S+T)(E-U)=2T.$$

Setzen wir weiter voraus, dass $|S|\neq 0$ [$|T|\neq 0$] sei, so ist auch wegen (14) [(15)]

$$|E+U|\neq 0\quad[|E-U|]\neq 0.$$

Nun folgt aus (12)

$$(S+T)U=S-T,$$
$$SU+TU=S-T,$$
$$T+TU=S-SU,$$

(16) $$T(E+U)=S(E-U)$$

und hieraus, da $|E+U|\neq 0$ [$|E-U|$] $\neq 0$ ist, die Gleichung (13).

Umgekehrt folgt, wenn

$$S\neq 0,\ |E+U|\neq 0\ [|T|\neq 0,\ |E-U|\neq 0]$$

ist, aus (13) die Gleichung (12).

Wir setzen nun endlich voraus, dass die Substitution U die *symmetrische* bilineare Form S in sich selbst überführe, dass also symbolisch

(17) $$S=U'SU$$

sei; ferner nehmen wir an, dass $|E+U|\neq 0$ sei. Dann können wir nach dem Vorhergehenden eine Form T bestimmen derart, dass

$$U=(S+T)^{-1}\ (S+T)$$

wird. Wir behaupten, dass unter der über U gemachten Voraussetzung T eine *alternirende* Form ist. Denn die Formen T und

$$T_0 = (E + U') T (E + U)$$

sind congruent; nun folgt aber aus (13) die Gleichung (16); daher ist

$$T_0 = (E + U') S (E - U) = S + U'S - SU - U'SU$$

oder wegen (17) $$T_0 = U'S - SU;$$

aus dieser Gleichung folgt aber, da $S' = S$ ist,

$$T_0' = SU - U'S,$$

aus den beiden letzten Gleichungen endlich

$$T_0' = -T_0.$$

Also ist T_0 alternirend, dasselbe gilt von dem zu T_0 congruenten T, und damit ist die Behauptung bewiesen.

Ganz analog beweist man den auf ein alternirendes T bezüglichen Theil des Satzes 29) mittelst der Gleichung

$$S_0 = (E - U') S (E - U) = (E - U') T (E + U) = TU - U'T;$$

hier wird $$S_0' = -U'T + TU = S_0.$$

87. Wir benützen das Vorhergehende, um den Charakter der Substitutionen zu ermitteln, welche geeignet sind, eine symmetrische [alternirende] ordinäre Form in sich selbst zu transformiren.

Angenommen P genüge den Bedingungen des Satzes XXVII. Dann giebt es eine Form A derart, dass

$$A = P'AP$$

ist. Hieraus folgt aber

$$A' = P'A'P, \quad A + A' = P'(A + A')P, \quad A - A' = P'(A - A')P.$$

Es giebt mithin unter gemachter Voraussetzung auch immer eine symmetrische Form $S = A + A'$ und eine alternirende Form $T = A - A'$, welche durch P in sich selbst übergehen. Aber es kann die Determinante von S oder von T Null sein, ja es kann sogar vorkommen, dass S oder T identisch Null ist. Es fragt sich aber, welches der Charakter einer Substitution ist, welche eine *ordinäre* symmetrische [alternirende] Form in sich selbst transformirt.

a) Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir zunächst einmal an, dass die charakteristische Determinante $|\lambda E - P|$ von P nur für einen Werth $\lambda = \varepsilon$ verschwindet, dessen Quadrat gleich Eins ist. Alsdann ist

$$|\varepsilon E + P| \neq 0.$$

Ist nun S [T] eine ordinäre symmetrische [alternirende] Form, die durch P in sich selbst übergeht, so ist auch

$$U = \varepsilon P \quad [U = -\varepsilon P]$$

eine Substitution, welche S [T] in sich selbst transformirt. Diese Form U hat aber die weitere Eigenschaft, dass

$$|E+U| \neq 0 \quad [|E-U| \neq 0]$$

ist. Daher kann man nach Satz 29) in 86

$$U=(S+T)^{-1}\ (S-T)$$

setzen, wo T [S] eine alternirende [symmetrische] Form bedeutet. Setzen wir nun

$$S+T=A,$$

so wird, da $S-T=A'$,

$$\varepsilon P=A^{-1}A' \quad [-\varepsilon P=A^{-1}A']$$

und weiter

(18) $$A(\lambda E-P)=\lambda A-\varepsilon A' \quad [A(\lambda E-P)=\lambda A+\varepsilon A'].$$

Nun hat aber nach Theorem XIX die Determinante $|\lambda A-\varepsilon A'|$ [$|\lambda A+\varepsilon A'|$] die ET von der Gestalt

$$(\lambda-\varepsilon)^{2\varkappa} \quad [(\lambda-\varepsilon)^{2\varkappa+1}]$$

stets *zweimal*; wegen (18) gilt das Gleiche von $|\lambda\varepsilon-P|$. Also: *Die ET der Determinante $|\lambda E-P|$ von der Gestalt*

$$(\lambda-\varepsilon)^{2\varkappa} \quad [(\lambda-\varepsilon)^{2\varkappa+1}]$$

sind stets paarweise vorhanden.

b) Es sei nun P irgend eine Substitution, welche eine ordinäre symmetrische Form S in sich selbst überführt, und in ET zerlegt

$$\varphi(\lambda)=|\lambda E-P|=\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda),$$

wo $\varphi_1(\lambda)$ das Produkt *aller* ET vorstellt, die für $\lambda=\varepsilon$ ($\varepsilon^2=1$) verschwinden; es ist also

$$\varphi_2(\varepsilon) \neq 0,$$

dagegen kann $\varphi_2(-\varepsilon)=0$ sein. Ist der Faktor $\varphi_1(\lambda)$ von $\varphi(\lambda)$ vom m^{ten} Grade in λ, dann sei P_1 eine Form der Variabelen

$$x_\mu,\ y_\mu\ (\mu=1, 2, \ldots m)$$

derart, dass für $E_1=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_my_m$, in ET zerlegt,

$$|\lambda E_1-P_1|=\varphi_1(\lambda),$$

und P_2 eine Form der Variabelen x_ν, y_ν ($\nu=m+1,\ m+2, \ldots n$) derart, dass für $E_2=x_{m+1}y_{m+1}+\cdots+x_ny_n$, in ET zerlegt,

$$|\lambda E_2-P_2|=\varphi_2(\lambda)$$

wird (Theorem XXII). Dann ist nach Theorem V, wenn

$$P_0=P_1+P_2$$

gesetzt wird, in ET zerlegt,

$$|\lambda E-P_0|=\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)=\varphi(\lambda)=|\lambda E-P|;$$

daher sind die Formen P_0 und P ähnlich (Theorem XXI); $|P_0|$ ist nicht Null, weil $|P| \neq 0$ ist; also sind wegen

$$|P_0|=|P_1|\cdot|P_2|$$

auch $|P_1|$ und $|P_2|$ von Null verschieden.

Da aber P_0 und P ähnliche Formen sind, so giebt es nach 84 eine zu S congruente Form S_0, welche durch P_0 in sich selbst transformirt wird. P_0 ist aber zerlegbar, die charakteristische Determinante des einen Theiles P_1 verschwindet für $\lambda = \varepsilon$, die des anderen aber nicht für $\lambda = \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon$, also sind die Formen P_0 und S_0 nach Satz 28) in 85 *in derselben Weise* zerlegbar. Es sei nun S_0, so zerlegt wie P_0, gleich $S_1 + S_2$. Dann sind wegen $|S_0| \neq 0$ auch $|S_1| \neq 0$, $|S_2| \neq 0$. Da S symmetrisch ist, so ist es auch S_0, und zwar müssen beide Theile von S_0 symmetrisch sein. Weiter ist (22)

$$P_0' S_0 P_0 = (P_1' + P_2')(S_1 + S_2)(P_1 + P_2) = P_1' S_1 P_1 + P_2' S_2 P_2$$

oder, da

$$P_0' S_0 P_0 = S_0 = S_1 + S_2,$$

$$P_1' S_1 P_1 + P_2' S_2 P_2 = S_1 + S_2.$$

Aus der letzten Gleichung folgt aber, da S_1 und S_2 keine Variabele gemeinsam haben,

$$P_1' S_1 P_1 = S_1, \quad P_2' S_2 P_2 = S_2.$$

Die ordinäre symmetrische Form S_1 geht also durch eine Substitution P_1 in sich selbst über, deren charakteristische Determinante nur für $\lambda = \varepsilon$ Null ist. Nach dem oben unter a) Gezeigten sind daher die ET dieser Determinante von der Gestalt $(\lambda - \varepsilon)^{2\varkappa}$ doppelt vorhanden; das Gleiche gilt für die Determinante $|\lambda\varepsilon - P|$, ε kann $+1$ oder -1 sein, *also sind die ET der Determinante* $|\lambda\varepsilon - P|$ *von der Gestalt* $(\lambda - 1)^{2\varkappa}$ *und* $(\lambda + 1)^{2\varkappa}$ *paarweise vorhanden.*

Für eine alternirende Form T beweist man analog mittelst des Resultates unter a) oben, dass, wenn

$$T = P' T P, \quad |T| \neq 0$$

ist, *die charakteristische Determinante* $|\lambda\varepsilon - P|$ *von* P *die ET von der Gestalt*

$$(\lambda - 1)^{2\varkappa+1}, \quad (\lambda + 1)^{2\varkappa+1}$$

doppelt besitzt.

c) Wir behaupten nun, dass die unter e) gefundenen Bedingungen zusammen mit denen des Satzes XXVII nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend dafür sind, dass die Substitution P eine ordinäre symmetrische [alternirende] Form in sich selbst transformirt, dass also folgender Satz von Frobenius gilt:*

XXVIII. Damit eine Substitution geeignet sei eine ordinäre symmetrische [alternirende] bilineare Form in sich selbst zu transformiren, ist nothwendig und hinreichend, dass die Elementartheiler ihrer charakteristischen Determinante paarweise von gleichem Grade sind

* l. c. S. 41.

und für reciproke Werthe verschwinden, mit Ausnahme derer, die für die Werthe $+1$ oder -1 Null sind und einen ungeraden [geraden] Exponenten haben.

Wir können uns beim Beweise auf die symmetrischen Formen beschränken, da derselbe für alternirende ganz analog ist.

Es sei, in ET zerlegt,

$$\varphi(\lambda) = |\lambda E - P| = \varphi_1(\lambda) \cdot \varphi_2(\lambda),$$

wo $\varphi_1(\lambda)$ das Produkt aller ET vorstelle, die für

$$\lambda = -1$$

Null sind; $\varphi(\lambda)$ sei vom m^{ten} Grade in λ.* Dann giebt es eine Form $\lambda A_1 + A_1'$ der Veränderlichen

$$x_\mu, \; y_\mu (\mu = 1, 2, \ldots m)$$

derart, dass, in ET zerlegt,

$$|\lambda A_1 + A_1'| = \varphi_1(\lambda),$$

und eine Form $\lambda A_2 - A_2'$ der Variabelen

$$x_\nu, \; y_\nu (\nu = m+1, \quad m+2, \ldots n)$$

derart, dass, in ET zerlegt,

$$|\lambda A_2 - A_2'| = \varphi_2(\lambda)$$

wird. Denn wird z. B. $\varphi_2(\lambda)$, wenn $\lambda = \frac{\lambda_1}{-\lambda_2}$ gesetzt und dann mit λ_2^{n-m} multiplizirt wird, zu $\varphi_2'(\lambda_1, \lambda_2)$, so sind die Faktoren von $\varphi_2'(\lambda_1, \lambda_2)$ — bei der durch $\varphi_2(\lambda)$ gegebenen Zerlegung — paarweise gleichen Grades und für reciproke Werthe von $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ gleich Null, die Faktoren von der Gestalt $(\lambda_1 + \lambda_2)^{2\varkappa}$ sind doppelt vorhanden, die von der Gestalt $(\lambda_1 + \lambda_2)^{2\varkappa+1}$ in gerader oder ungerader Zahl; daher giebt es nach Theorem XX eine Form A_2 derart, dass, in ET zerlegt,

$$|\lambda_1 A_2 + \lambda_2 A_2'| = \varphi_2'(\lambda_1, \lambda_2)$$

ist. Nun ist $|A_2| \neq 0$, da $\varphi(0) \neq 0$ ist; ferner wird für $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -1$

$$|\lambda A_2 - A_2'| = \varphi_2(\lambda),$$

und zwar ist, in ET zerlegt, $|\lambda A_2 - A_2'| = \varphi_2(\lambda)$ (37). — Auch $|A_1|$ ist nicht Null, ferner nach Voraussetzung

$$|A_1 + A_1'| \neq 0, \quad |A_2 + A_2'| \neq 0$$

und somit, wenn wir

$$A_1 + A_1' = S_1, \quad A_2 + A_2' = S_2$$

setzen,

$$S_0 = S_1 + S_2$$

eine symmetrische Form, deren Determinante nicht Null ist. Setzen wir daher weiter

* Für $m = 0$ bleibt das Folgd. mit selbstverständlichen Modifikationen bestehen.

$$-A_1^{-1}A_1' = P_1, \quad A_2^{-1}A_2' = P_2, \quad P_1 + P_2 = P_0,$$

$$E_1 = \sum x_\mu y_\mu, \quad E_2 = \sum x_\nu y_\nu,$$

so wird

$$A_1(\lambda E_1 - P_1) = \lambda A_1 + A_1', \quad A_2(\lambda E_2 - P_2) = \lambda A_2 - A_2'.$$

Daher sind die Determinanten $|\lambda E_1 - P_1|$ und $|\lambda E_2 - P_2|$, in ET zerlegt, gerade gleich $\varphi_1(\lambda)$ bez. $\varphi_2(\lambda)$, mithin ist, in ET zerlegt, nach Theorem V

$$|\lambda E - P_0| = \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda) = \varphi(\lambda).$$

Die Formen P und P_0 sind also ähnlich (Theorem XXI), woraus zugleich folgt, dass $|P_0| \neq 0$ ist. Nach 85, Schluss, hat man aber

$$P_1' A_1 P_1 = A_1,$$

woraus

$$P_1' A_1' P_1 = A_1',$$

folgt. Daher wird

$$P_1' S_1 P_1 = S_1$$

und analog

$$P_2' S_2 P_2 = S_2,$$

woraus endlich $(P_1' + P_2')(S_1 + S_2)(P_1 + P_2) = S_1 + S_2$ (22) oder

$$P_0' S_0 P_0 = S_0$$

sich ergiebt. Es existirt also eine ordinäre symmetrische Form S_0, die durch P_0 in sich übergeht. Nach 84 transformirt daher auch die zu P_0 ähnliche Substitution P eine zu S_0 congruente Form, also ebenfalls eine symmetrische Form mit nicht verschwindender Determinante in sich selbst, w. z. b. w.

88. Ist nun $\varphi(\lambda)$ ein Produkt von Potenzen linearer Funktionen von λ, welche die in dem Theoreme XXVIII — soweit es sich auf symmetrische Formen bezieht — für die ET von $|\lambda E - P|$ angegebene Beschaffenheit zeigen, dann giebt es, wenn $\varphi(\lambda)$ vom Grade n in λ ist, nach Theorem XXIV in 79 eine lineare Substitution P:

(19) $$x_i = s_{1i}x_1' + s_{2i}x_2' + \cdots + s_{ni}x_n' \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

deren charakteristische Funktion, in ET zerlegt, gerade $\varphi(\lambda)$ ist. Daher giebt es nach dem eben bewiesenen Satze XXVIII eine symmetrische Form S von $2n$ Variabelen x_i, y_i, welche durch die Substitutionen (19) und

(20) $$y_i = s_{1i}y_1' + s_{2i}y_2' + \cdots + s_{ni}y_n'$$

in sich selbst transformirt wird; dabei ist $|S| \neq 0$. Es sei nun S_0 irgend eine andere ordinäre symmetrische Form von $2n$ Variabelen; dann sind nach 76, Satz 19) die Formen S_0 und S congruent, und es giebt daher (nach 84) zu (19) bez. (20) ähnliche Substitutionen, welche S_0 congruent in sich selbst transformiren. Da nun aber die

charakteristischen Determinanten dieser Substitutionen mit denen von (19) und (20) in den ETn übereinstimmen, so gilt der Satz:

XXIX. Es giebt Substitutionen, die eine gegebene ordinäre symmetrische [alternirende] bilineare Form in sich selbst transformiren, deren charakteristische Determinanten vorgeschriebene Elementartheiler — im Sinne des Theorems XXVIII — besitzen.

Für alternirende Formen erledigt sich der Beweis ganz analog.

In den Theoremen XVIII und XXIX kann man für „symmetrische bilineare Form“ sagen „quadratische Form“ (63) und erhält so *zwei Theoreme über quadratische Formen*, die namentlich für die Geometrie von ausserordentlichem Interesse sind.

Man kann auf Grund des Theorems XXIX *die Substitutionen klassificiren, die eine gegebene symmetrische bilineare (quadratische) oder alternirende Form in sich selbst transformiren*, indem man sich eines wiederholt angewandten Principes bedient. Man setzt dabei in der Charakteristik einer Substitution (79) über die Exponenten, welche sich auf die Basis $\lambda + 1$ $(\lambda - 1)$ beziehen ein $-(+)$ Zeichen. Die zu den einzelnen Klassen gehörigen Normalformen erhält man aus 79.

Zum Beispiel hat man folgende

Klassen der Substitutionen, welche eine ordinäre ternäre quadratische Form in sich selbst transformiren.

1. $[1\,1\,\overset{+}{1}]^*: x_1 = c_1 x_1', \quad x_2 = \frac{1}{c_1} x_2', \quad x_3 = x_3'.$
2. $[\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}]: x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3'.$
3. $[\overset{+}{1}\,\overset{+}{1}\,\overset{-}{1}]: x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = -x_3'.$
4. $[\overset{+}{3}]: x_1 = x_1', \quad x_2 = x_1' + x_2', \quad x_3 = x' + x_3'.$

Man kann hier leicht ternäre quadratische Formen angeben, die durch vorstehende Substitutionen bez. in sich selbst übergehen. Durch 1.—3. wird die Form $x_1 x_2 + x_3^2$, durch 4. die Form

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2 - 4x_1 x_3$$

in sich selbst transformirt. U. s. w.

§ 13. Orthogonale und cyklische Formen.

89. Zu den Substitutionen, welche eine ordinäre symmetrische bilineare Form in sich selbst transformiren, gehören die orthogonalen Substitutionen. Ist nämlich R eine solche Substitution, so hat man symbolisch (13)

* Man kann auch $[1\,1\,\overline{1}]$ schreiben, da zwei Substitutionen P und $-P$ nicht wesentlich verschieden sind.

$$R' = R^{-1}, \quad R'R = RR' = E, \quad R'ER = E;$$

R transformirt also die symmetrische Form $E = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ in sich selbst. Daher folgt sofort aus Theorem XXVIII:*

XXX. Die Elementartheiler der charakteristischen Determinante einer orthogonalen Substitution sind paarweise gleichen Grades und für reciproke Werthe gleich Null, mit Ausnahme derjenigen, die für $+1$ oder -1 verschwinden und einen ungeraden Exponenten haben.

Aus Theorem XXIX aber folgt unmittelbar der Satz:**

XXXIa. Es giebt bei gegebenem n orthogonale Substitutionen für n Variabele, deren charakteristische Determinanten vorgeschriebene Elementartheiler — im Sinne des Theorems XXX — besitzen.

Auf Grund dieses Theorems kann man die orthogonalen Substitutionen *klassificiren.* Zu *Normalformen* für die Substitutionen der einzelnen Klassen gelangt man mittelst der in § 12 angegebenen Normalformen. Man ermittelt zunächst eine quadratische Form S, die durch eine solche Substitution P in sich übergeht (S. 170—171); alsdann sucht man diejenige Substitution G, die S in E überführt, und findet dann aus P und G eine Substitution P_0, die E in sich selbst transformirt (84, Anfang).

90. Von besonderem Interesse sind die *reellen* orthogonalen Substitutionen, die wir in 90 *ausschliesslich* in Betracht ziehen.

Es sei*** R eine reelle orthogonale Form von $2n$ Variabelen x_i, y_i, ferner wieder $E = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ und c eine Wurzel der Gleichung $|\lambda E - R| = 0$. Sind dann, nach fallender Grösse geordnet, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die zur Basis $\lambda - c$ gehörenden ET von $|\lambda E - R|$, so hat man für $(\lambda E - R)^{-1}$ eine Entwickelung nach steigenden Potenzen von $\lambda - c$ von der Form

$$(1) \qquad (\lambda E - R)^{-1} = A(\lambda - c)^{-\alpha} + B(\lambda - c)^{-\alpha+1} + \cdots$$

Vergl. 71. Setzt man nun die rechte und linke Seite dieser Gleichung mit $(\lambda E - R)$ zusammen, so kommt

$$(\lambda E - R)^{-1}(\lambda E - R) = E = \frac{A(\lambda E - R)}{(\lambda - c)^{\alpha}} + \frac{B(\lambda E - R)}{(\lambda - c)^{\alpha - 1}} + \cdots,$$

woraus

* l. c. S. 48—49.

** l. c. S. 49.

*** l. c. S. 51 flg.

$$(\lambda - c)^{\alpha} E = A(\lambda E - R) + B(\lambda E - R)(\lambda - c) + \cdots,$$

und für $\lambda = c$,

(2) $$A(cE - R) = 0$$

folgt. Ist nun für $\sqrt{-1} = i$, $c = a + ib$, so sei $a - ib = \bar{c}$; ist

$$A = A_1 + iB_1,$$

so sei $A_1 - iB_1 = \bar{A}$, wobei a, b, A_1, B_1 reelle Zahlen und Formen bedeuten. Dann folgt aus (2) durch Vertauschung von i mit $-i$

(3) $$\bar{A}(\bar{c}E - R) = 0.$$

Es ist also nach (2) und (3)

$$AR = cA, \quad \bar{A}R = \bar{c}\bar{A}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt weiter

$$R'\bar{A}' = \bar{c}\bar{A}'$$

und hieraus

$$(AR)(R'\bar{A}') = c\bar{c}A\bar{A}';$$

nach Voraussetzung ist aber $RR' = E$, sodass sich

$$A\bar{A}' = c\bar{c}A\bar{A}', \quad A\bar{A}'(1 - c\bar{c}) = 0$$

ergiebt. Nun kann aber $A\bar{A}'$ nicht Null sein (11, 5), also ist

$$1 - c\bar{c} = 0, \quad c\bar{c} = 1, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Daher gilt der Satz*:

30) Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer reellen orthogonalen Substitution haben sämmtlich den Modul 1.

Wir benutzen jetzt die bekannte geometrische Darstellung complexer Zahlen durch die Punkte einer Ebene. Die Reihe (1) convergirt innerhalb eines gewissen, um c beschriebenen Kreises (Convergenzkreis), c selbst liegt nach Satz 30) auf dem Einheitskreise. Wir beschränken jetzt die Veränderliche λ auf das Stück der Peripherie des Einheitskreises, welches innerhalb des Convergenzkreises liegt. Nun ergiebt sich aus (1) durch Zusammensetzung mit

$$(\lambda^{-1}R^{-1})^{-1} = \lambda R$$

mit Rücksicht auf 12, Schluss,

$$(R' - \lambda^{-1}E)^{-1} = \lambda RA(\lambda - c)^{-\alpha} + \cdots$$

Bildet man rechts und links die conjugirte Form, so wird

$$(R - \lambda^{-1}E)^{-1} = \lambda A'R'(\lambda - c)^{-\alpha} + \cdots$$

Vertauscht man hierin i mit $-i$, so erhält man, da nach Voraussetzung λ^{-1} zu λ und nach (54) Satz 30) c^{-1} zu c conjugiert complex ist,

* Brioschi, Liouv. Journ. (54) Bd. 19, S. 253; Schläfli, Crelle's J. (66) Bd. 65, S. 186; Frobenius, Crelle's J. (78) Bd. 84, S. 52; Stickelberger: Ueber reelle orth. Subst., Progr. der eidgen. polyt. Schule für das Schuljahr 1877/78 (erstes Halbjahr), Zürich 1877, S. III.

$$(R - \lambda E)^{-1} = \lambda^{-1} \bar{A}' R' (\lambda^{-1} - c^{-1})^{-\alpha} + \cdots$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit $-E$

$$(\lambda E - R)^{-1} = \bar{A}' R' (-1)^{\alpha-1} c^{\alpha} \lambda^{\alpha-1} (\lambda - c)^{-\alpha} + \cdots$$

Jetzt entwickelt man noch $\lambda^{\alpha-1}$ nach Potenzen von $\lambda - c$ und setzt

$$(-1)^{\alpha-1} c^{2\alpha-1} = d;$$

alsdann erhält man die Gleichung

$$(4) \qquad (\lambda E - R)^{-1} = d \bar{A}' R' (\lambda - c)^{-\alpha} + \cdots$$

Der Vergleich von (1) und (4) lehrt, dass

$$A = d \bar{A}' R',$$

also

$$A^2 = d (A \bar{A}') R'$$

ist. Nun ist aber $A\bar{A}' \not\equiv 0$, $|R'| \neq 0$, *also ist auch* $A^2 \not\equiv 0$. (12, Anf.)

Differentiirt man die Gleichung (1) nach λ, so erhält man (21)

$$-(\lambda E - R)^{-2} = -\alpha A (\lambda - c)^{-\alpha-1} + \cdots;$$

durch Zusammensetzung aber erhält man aus (1)

$$(\lambda E - R)^{-2} = A^2 (\lambda - c)^{-2\alpha} + \cdots$$

Der Vergleich der Exponenten von $\lambda - c$ in den Anfangsgliedern dieser beiden Entwickelungen von $(\lambda E - R)^{-2}$ zeigt, dass

$$-2\alpha = -\alpha - 1$$

oder

$$\alpha = 1$$

ist; nach Theorem I ist dann auch $\beta = \gamma = \cdots = 1$. Also gilt das Theorem:*

XXXII. Die charakteristische Determinante einer reellen orthogonalen Substitution besitzt lauter lineare Elementartheiler.

Haben zwei reelle orthogonale Formen R_1 und R_2 dieselbe charakteristische Determinante, so stimmen nach XXXII die ET von $|\lambda E - R_1|$ und $|\lambda E - R_2|$ überein. Denn steckt $(\lambda - c)$ zur α^{ten} Potenz in $|\lambda E - R_1| = |\lambda E - R_2|$, so hat jede dieser Determinanten den ET $(\lambda - c)$ α-mal. Also:

*31) Zwei orthogonale Formen mit reellen Koefficienten sind dann und nur dann ähnlich, wenn sie dieselbe charakteristische Determinante haben.***

---

* Frobenius, l. c. S. 53; Stickelberger, l. c. S. VII.

** Stickelberger, l. c. Man kann eine reelle orthogonale Form in eine zu ihr ähnliche reelle orthogonale Form durch eine reelle orthogonale Substitution überführen. Denn es gilt der Satz:

Sind zwei (reelle) orthogonale Formen ähnlich, so sind sie auch congruent und können durch eine (reelle) orthogonale Substitution in einander transformirt werden. (Frobenius, Crelle's Journ. (78) Bd. 84, S. 59, SB 1896, S. 15.)

Ist R eine reelle orthogonale von $2n$ Variabelen abhängige Substitution (Form), so ist nach den Sätzen XXX—XXXII, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet, in ET zerlegt,

$$
(5)\quad \begin{cases} |\lambda E - R| = \underbrace{(\lambda - e^{i\vartheta_1})(\lambda - e)^{-i\vartheta_1}) \ldots (\lambda - e^{i\vartheta_\varrho})(\lambda - e^{-i\vartheta_\varrho})}_{2\varrho \text{ Stück}} \\ \times \underbrace{(\lambda-1)(\lambda-1)\ldots(\lambda-1)}_{\sigma \text{ Stück}}\underbrace{(\lambda+1)(\lambda+1)\ldots(\lambda+1)}_{\tau \text{ Stück}}, \end{cases}
$$

wo

$$
(6)\qquad 2\varrho + \sigma + \tau = n.
$$

Wir wollen die rechte Seite von (5) mit $\varphi(\lambda)$ bezeichnen; es fragt sich dann, ob es, wenn man bei gegebenem n in $\varphi(\lambda)$ die Zahlen ϱ, σ, τ beliebig, aber so wählt, dass (6) erfüllt ist, eine reelle orthogonale Substitution R für $2n$ Variabele giebt derart, dass, in ET zerlegt, gerade

$$
|\lambda E - R| = \varphi(\lambda)
$$

ist. Dieses ist in der That der Fall. Man betrachte nämlich die folgende *reelle* orthogonale Substitution

$$
(7)\quad \begin{cases} x_1 = \cos\vartheta_1 x_1' - \sin\vartheta_1 x_2', \ldots, & x_{2\varrho-1} = \cos\vartheta_\varrho x_{2\varrho-1}' - \sin\vartheta_\varrho x_{2\varrho}', \\ x_2 = \sin\vartheta_1 x_1' + \cos\vartheta_1 x_2', \ldots, & x_{2\varrho} = \sin\vartheta_\varrho x_{2\varrho-1} + \cos\vartheta_\varrho x_{2\varrho}', \\ x_{2\varrho+1} = x_{2\varrho+1}', \ldots\ldots, & x_{2\varrho+\sigma} = x_{2\varrho+\sigma}, \\ x_{2\varrho+\sigma+1} = -x_{2\varrho+\sigma+1}', \ldots, & x_n = -x_n. \end{cases}
$$

Das System der charakteristischen Determinante derselben ist zerlegbar; die ET von

$$
\begin{vmatrix} \lambda - \cos\vartheta_1 & \sin\vartheta_1 \\ -\sin\vartheta_1 & \lambda - \cos\vartheta_1 \end{vmatrix}
$$

sind

$$
\lambda - (\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1) = \lambda - e^{i\vartheta_1} \quad \text{und} \quad \lambda - (\cos\vartheta_1 - i\sin\vartheta_1) = \lambda - e^{-i\vartheta_1},
$$

u. s. w.; daher hat nach dem Satze V die charakteristische Determinante von (7) die gewünschten ET. Also:

XXXIb. **Es giebt bei gegebenem n reelle orthogonale Substitutionen für n Variabelen, deren charakteristische Determinanten n vorgeschriebene Elementartheiler besitzen.**

Nach dem Satze XXIII kann jede reelle orthogonale Substitution durch reelle* lineare Substitution auf die *Normalform* (7) gebracht werden.**

* Und zwar durch reelle *orthogonale* Substitution. Vergl. 89 u. S. 175, Anm.

** Stickelberger, l. c. S. V.

91. Wir nennen eine Form (Substitution)

$$A = \sum a_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

eine cyklische Form (Substitution) m^{ten} Grades, wenn es eine positive, ganze, endliche Zahl m giebt derart, dass die m^{te} Potenz von A (15) gleich* E ist. A heisst eine primitive cyklische Form (Substitution) m^{ten} Grades, wenn es keine Zahl $l < m$ giebt, für die $A^l = E$ ist.

Ist A cyklisch m^{ten} Grades, P eine beliebige ordinäre Form, so ist $B = P^{-1}AP$ gleichfalls cyklisch m^{ten} Grades. Denn es ist

$$B^m = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\dots(P^{-1}AP)$$
$$= P^{-1}A^m P = P^{-1}EP = E.$$

32) Ist A eine cyklische Form m^{ten} Grades, so ist jede zu A ähnliche Form ebenfalls eine cyklische Form m^{ten} Grades.

Die cyklische Form m^{ten} Grades A genügt der Gleichung

$$A^m - E = 0.$$

Die Gleichung

$$\lambda^m - 1 = 0$$

hat aber bekanntlich lauter verschiedene Wurzeln; folglich hat die Determinante $|\lambda E - A|$ nur lineare ET (17, Satz 8). Sei $\lambda - c$ ein solcher, also c eine Wurzel der Gleichung $|\lambda E - A| = 0$, dann ist nach dem Satze am Schlusse von 16 c^m eine Wurzel der Gleichung

$$|\lambda E - A^m| \equiv |\lambda E - E| \equiv (\lambda - 1)^m = 0;$$

also ist

$$c^m = 1, \quad c = \sqrt[m]{1}.$$

Besitzt umgekehrt die charakteristische Determinante einer Form A nur lineare ET und zwar nur solche, die für m^{te} Wurzeln aus 1 Null sind, so ist A cyklisch m^{ten} Grades. Denn ist, in ET zerlegt,

$$|\lambda E - A| = (\lambda - \varepsilon_1)(\lambda - \varepsilon_2)\dots(\lambda - \varepsilon_n),$$

wo $\varepsilon_i^m = 1\,(i = 1, 2, \dots n)$, so ist für

$$B = \varepsilon_1 x_1 y_1 + \varepsilon_2 x_2 y_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n y_n$$

die Determinante $|\lambda E - B|$, in ET zerlegt, ebenfalls gleich

$$(\lambda - \varepsilon_1)(\lambda - \varepsilon_2)\dots(\lambda - \varepsilon_n).$$

Also sind A und B ähnliche Formen (Th. XXI), B ist cyklisch m^{ten} Grades, folglich auch A nach dem Satze 32.

XXXIII. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass A eine cyklische Form m^{ten} Grades ist,

* Ist $E = cA^m$, so ist für $B = \sqrt[m]{c}A$ geradezu $B^m = E$. Vergl. die Anmerk. S. 160.

bestehen darin, dass die charakteristische Determinante von A nur lineare Elementartheiler besitzt, und dass diese nur für m^{te} Wurzeln aus Eins verschwinden.*

Man erkennt leicht, dass A *primitiv cyklisch* m^{ten} *Grades* ist, wenn $|\lambda E - A|$ nur lineare ET hat, alle Wurzeln von $|\lambda E - A| = 0$ m^{te} Wurzeln aus Eins sind, und wenn sich unter diesen Wurzeln mindestens eine *primitive Wurzel* befindet; und umgekehrt. Ferner geht aus dem Beweise von Theorem XXXIII hervor, dass man cyklische Formen m^{ten} Grades von $2n$ Variabelen bilden kann, die — im Sinne des Theorems XXXIII — *vorgeschriebene ET besitzen*, was wiederum zu einer *Klassifikation der cyklischen Formen (Substitutionen)* bei gegebenem n und m führt. Wir gehen hierauf jedoch nicht näher ein, sondern geben noch einige Sätze über Formen**, die zugleich orthogonal und symmetrisch oder zugleich orthogonal und alternirend sind, welche sich mittelst des Satzes XXXIII einfach beweisen lassen.

92. Sei zunächst (symbolisch) zugleich

$$A' = A^{-1}$$

und

$$A' = A.$$

Dann ist

$$A^2 = AA' = AA^{-1} = E;$$

A^2 ist also cyklisch zweiten Grades (91) und folglich hat $|\lambda E - A|$ nur lineare ET, die für

$$\sqrt[2]{1} = \pm 1$$

verschwinden (XXXIII). Also:

XXXIV. Ist eine Form zugleich orthogonal und symmetrisch, so sind die Elementartheiler ihrer charakteristischen Determinante alle linear und verschwinden nur für $+1$ oder -1.***

Hat man aber gleichzeitig

$$A' = A^{-1}, \quad A' = -A,$$

so ist

$$A^2 = -AA' = -AA^{-1} = -E.$$

Setzt man daher $iA = B$, so ist

* Diesen Satz giebt Segre, Mem. d. R. Acad. d. Scienze di Torino (85), Ser. II, Tom. 37, S. 6 Anm. ohne Beweis. Vergl. auch Frobenius, Crelle's Journ. (78) Bd. 84, S. 16, Satz VIII.

** Reelle oder nicht reelle.

*** Frobenius, Crelle's Journ. Bd. (78) 84, S. 26.

$$B^2 = -A^2 = E,$$

B also eine cyklische Form zweiten Grades; die ET von $|\lambda_1 E + \lambda_2 B|$ haben nach XXXIII die Gestalt $\lambda_1 + \lambda_2$ oder $\lambda_1 - \lambda_2$, also haben diejenigen von $|\lambda E - A|$ die Gestalt $\lambda - i$ oder $\lambda + i$, wie sich sofort ergiebt, wenn man $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = i$ setzt. Nun gehört aber nach XXX zu jedem ET $\lambda - i$ ein ET $\lambda + i$. Also:

XXXV. Ist eine Form orthogonal und alternirend, so sind die Elementartheiler ihrer charakteristischen Determinante alle linear und verschwinden zur Hälfte für $+i$, zur Hälfte für $-i$.*

Im Folgenden wird uns ein weiterer Fall entgegentreten, wo eine Determinante nur lineare ET besitzt.

§ 14. Definite Formen.

93. Eine quadratische Form

$$D = \sum a_{ik} x_i x_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

mit reellen Koefficienten $a_{ik} = a_{ki}$ heisst definit, wenn sie für reelle Werthe der homogenen Veränderlichen $x_1 | x_2 | \ldots | x_n$ stets Werthe von *demselben* Vorzeichen annimmt; sie heisst positiv oder negativ, je nachdem dieses Vorzeichen $+$ oder $-$ ist. Ueber definite Formen gilt folgender bekannte Satz von Kronecker:**

33) Verschwindet die definite Form D für ein reelles Werthesystem $c_1 | c_2 | \ldots | c_n$, so bestehen die n Gleichungen

$$(1) \qquad a_{i1} c_1 + a_{i2} c_2 + \cdots + a_{in} c_n = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Diese Eigenschaft der definiten Formen ist für alle Untersuchungen über Schaaren quadratischer Formen, die eine definite Grundform besitzen, von fundamentaler Bedeutung. Mit Hilfe des Satzes 33) beweist man z. B. sehr einfach, *dass, wenn A eine beliebige reelle, D eine definite quadratische Form von n Variabelen ist, die Gleichung*

$$|\lambda A + D| = 0$$

*nur reelle Wurzeln hat****, vorausgesetzt, dass $|\lambda A + D| \equiv\!\!\!\!/\; 0$ ist.

* Frobenius, l c.

** Kronecker, BM 1868, S. 339.

*** Weierstrass, BM 1858, S. 213; BM 1868, S. 338; Gundelfinger in Hesse's Raumgeometrie, 3. Aufl. (76), IV. Suppl. u. in Gundelfinger-Dingeldey, Vorl. a. d anal. Geom. d. Kegelschn., Leipzig 1895, S. 66—67.

Wir gehen auf die Beweise dieser Sätze nicht näher ein, da sie bereits unter verschiedenen Gesichtspunkten in Lehrbüchern behandelt sind.*

Ueber die ET der Determinante einer Schaar der eben beschriebenen Art gilt nun folgendes Fundamentaltheorem:**

XXXVI. Verschwindet die Determinante einer Schaar

$$\lambda_1 A + \lambda_2 D$$



von quadratischen Formen nicht identisch, und ist eine ihrer Grundformen, etwa D, definit, so haben die Elementartheiler der Determinante der Schaar alle den Exponenten 1, mit Ausnahme der zur Basis λ_1 gehörigen ET, welch' letztere auch den Exponenten 2 haben können.

Wir setzen $\lambda_1 = g\lambda$, $\lambda_2 = h\lambda - 1$, wodurch

$$\lambda_1 A + \lambda_2 D = (gA + hD)\lambda - D = B\lambda - D$$

wird; dabei wählen wir g und h so, dass $g \neq 0$ ist und $|gA + hD| \neq 0$ wird. Alsdann entspricht jedem ET $(a\lambda_1 + b\lambda_2)^e$ von $|\lambda_1 A + \lambda_2 D|$ ein ET $(a'\lambda - b)^e$ von $|B\lambda - D|$ (37).

Wir untersuchen jetzt die ET von $|\lambda B - D|$, und zwar wollen wir von nun an unter B und D die Polarformen der quadratischen Formen B und D verstehen; wir setzen also (63)

$$B = B(xy) = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial B}{\partial x_i} y_i, \quad D = D(xy) = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial D}{\partial x_i} y_i \quad (i = 1, 2, \dots n).$$

Zur Basis $\lambda - c$, *wo* $c \neq 0$ *sei*, mögen die ET $(\lambda - c)^e$, $(\lambda - c)^f, \dots$ gehören, wo $e > f > \cdots$ Dann hat man, wenn wieder das symbolische Rechnen mit Formen benutzt wird, eine Entwickelung (71)

$$(2) \qquad (\lambda B - D)^{-1} = \frac{F}{(\lambda - c)} + \frac{G}{(\lambda - c)^{e-1}} + \frac{H}{(\lambda - c)^{e-2}} + \cdots;$$

da die Formen B und D symmetrisch sind, gilt das Gleiche von $F, G, H, \dots$ Aus (2) folgt für $E = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$

---

* Baltzer, Determinanten, 5. Auflage, Leipzig (81), S. 177 ff. Gundelfinger-Dingeldey, l. c. S. 65—67.

** Weierstrass, BM 1858, S. 207 ff. (Ges. W. Bd. I, S. 233). Vergl. auch Nachtrag zu dieser Abhandl. BM 1879, S. 430; BM 1868, S. 336 ff. (Ges. W. Bd. II, S. 42). Frobenius, Vierteljahresschrift der Naturf.-Gesellschaft in Zürich, Jahrg. 41, 1896, S. 20 ff. Gundelfinger im IV. Suppl. von Hesse's Raumgeometrie, 3. Aufl. (76) und in Gundelfinger-Dingeldey, Vorles. a. d. anal. G. der Kegelschn., Leipzig (95), S. 67—68. *Obiger Beweis ist mit geringen Modifikationen der, den* Gundelfinger *am zuletzt citirten Orte gegeben hat.* — Ueber verwandte Sätze vergl. Christoffel, Crelle's Journ. (64) Bd. 63, S. 255 bis 272 und Gundelfinger-Dingeldey, l. c. S. 70—75.

$$(\lambda - c)^e E = F(\lambda B - D) + G(\lambda B - D)(\lambda - c) + \cdots$$

und hieraus, wenn man $\lambda = c + \lambda'$ setzt,

(3) $E\lambda'^e = \{(c+\lambda')FB - FD\} + \lambda'\{(c+\lambda')GB - GD\} + \lambda'^2\{(c+\lambda')HB - HD\} + \cdots$

Wäre nun $e > 1$, so müsste

(4) $$cFB - FD = 0, \quad FB + cGB - GD = 0$$

sein. Da ferner $(FB + cGB - GD)' = BF + cBG - DG$ ist, so folgt aus (4)

$$(cFB - FD)G - F(BF + cBG - DG) = 0$$

oder

$$FBF = 0;$$

wegen der ersten Gleichung in (4) müsste also auch

$$FDF = 0$$

sein. Setzen wir aber

$$F = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = a_1'y_1 + a_2'y_2 + \cdots + a_n'y_n,$$

wo die a_i dieselben Funktionen der y_i bedeuten, wie die a_i' der x_i, so ist per def.

$$DF = \sum \frac{\partial D}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial D}{\partial y_i} a_i = D(xa);$$

daher ist

$$F'D' = FD = D(ya')$$

und somit

$$FDF = D(aa').$$

Unter der gemachten Voraussetzung wäre also $D(aa') = 0$. Für $x_i = y_i$ wird aber $a_i = a_i'$, sodass die definite Form D für $x_i = a_i$ Null wäre; nach Satz 33) wäre folglich auch $D(xa) = DF = 0$, und somit auch nach (4)

$$BF = 0.$$

Da aber $F \not\equiv 0$ ist, so müsste $|B| = 0$ sein, gegen die Voraussetzung. Also ist $e = f = \cdots = 1$ (Theorem I); die ET von $|\lambda B - D|$ mit der Basis $\lambda - c$, wo $c \neq 0$, sind alle linear, mithin auch die ET von $|\lambda_1 A + \lambda_2 D|$ mit der Basis $a\lambda_1 + b\lambda_2$, wo $b \neq 0$.

Wir nehmen jetzt weiter an, dass zur Basis λ die ET $\lambda^e, \lambda^f, \ldots$ von $|\lambda B - D|$ gehören, wo $e \geqq f \geqq \cdots$ Angenommen e wäre grösser als 2! Indem wir vorstehend $c = 0$ setzen, gelangen wir, wie daselbst, zur Gleichung (3). Unter der gemachten Voraussetzung muss dann

$$FD = FB - GD = GB - HD = 0$$

sein. Aus $FD = 0$ und $GB - HD = 0$ folgt aber, da $FD = DF$ u.s.w.

$$FBG = 0,$$

sodass, wegen $FB - GD = 0$,

$$GDG = 0$$

wird. Aus der letzten Gleichung folgt aber, wie oben, $GD = 0$ und hieraus $BF = 0$, was nicht sein kann. Daher ist $e \overline{\gtrless} 2$, und das Gleiche gilt für $f, g, \ldots$ nach Theorem I. Die ET von $|\lambda B - D|$

mit der Basis λ haben nur Exponenten „1“ oder „2“, und daher auch die ET von $|\lambda_1 A + \lambda_2 D|$ mit der Basis λ_1. — Damit ist Satz XXXVI vollständig bewiesen.

Der Satz über die Realität der Wurzeln, sowie das Theorem XXXVI gelten auch, wenn unter den Formen der Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ eine definite ist, etwa $gA + hB$, nur muss es dann im Theoreme statt „λ_1“ heissen „$h\lambda_1 - g\lambda_2$“. (37.)

Treten in einer Schaar *zwei* definite Formen D_1 und D_2, wo nicht $D_1 = \text{const.}\, D_2$, auf, so bringe man sie auf die Gestalt

$$\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2.$$

Hätte nun ein ET von $|\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2|$ mit der Basis λ_1 den Exponenten 2, so wäre $\lambda_1' D_2 + \lambda_2' D_1$ eine Schaar mit definiter zweiter Grundform derart, dass $|\lambda_1' D_2 + \lambda_2' D_1|$ einen ET $\lambda_2'^2$ besässe, was nach XXXVI unmöglich ist. Also:

XXXVII. Enthält eine ordinäre Schaar von quadratischen Formen zwei (nicht blos um eine Konstante verschiedene) definite Formen, so besitzt ihre Determinante lauter lineare Elementartheiler.

94. Da die Determinante einer Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 D$ bei definitem D ET von der im Theorem XXXVI angegebenen Beschaffenheit besitzt, so können in der zu $\lambda_1 A + \lambda_2 D$ gehörigen Weierstrass'schen reducirten Schaar (65, Satz 15) nur Theilschaaren von der Gestalt

$$T_1 = \lambda_1 a_\sigma X_\sigma^2 + \lambda_2 b_\sigma X_\sigma^2 \qquad (b_\sigma \neq 0,\ \text{ET}: a_\sigma \lambda_1 + b_\sigma \lambda_2),$$

$$T_2 = \lambda_1 a_\sigma X_\sigma^2 \qquad (\text{ET}: \lambda_1),$$

$$T_3 = \lambda_1 (2 a_\sigma X_\sigma X_{\sigma+1} - h X_\sigma^2) + \lambda_2 g X_\sigma^2 \qquad (\text{ET}: \lambda_1^2)$$

auftreten.

Ist $|D| \neq 0$, so treten Theilschaaren T_2 und T_3 in der Reducirten nicht auf; ist aber $|D| = 0$, so können wir $g = +1$ nehmen; h soll ebenfalls stets reell gewählt werden.

Da nach dem in 93 aufgeführten Satze die Determinante

$$|\lambda_1 A + \lambda_2 D|$$

nur *reelle* ET besitzt, so wird nach dem zu Gleichung (6) in 65 Bemerkten hier

$$X_\sigma = \sqrt{\varepsilon_\sigma}\, \mathfrak{X}_\sigma, \tag{5}$$

wo $\mathfrak{X}_\sigma$ eine *reelle* Form der Variabelen x_i vorstellt und ε_σ entweder $+1$ oder -1 ist. In einer Theilschaar T_3 ist $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_{\sigma+1}$.

Nun setzen wir weiter X_σ für $\sqrt{b_\sigma} X_\sigma$, was einer neuen linearen Substitution entspricht. Aus der Substitution, welche die Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 D$ in die reducirte $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \Delta$ überführt, und dieser zweiten Substitution resultirt eine dritte, bei welcher die neuen Variabelen mit

den alten wieder durch lineare Gleichungen von der Gestalt (5) zusammenhängen. Wir können also gleichzeitig durch lineare Substitution A und D auf die Gestalt

$$\mathsf{A} = \sum a_\varrho X_\varrho^2 + \sum a_\sigma X_\sigma^2 + \sum (2a_\tau X_\tau X_{\tau+1} - h X_\tau^2),$$
$$\Delta = \sum X_\varrho^2 \qquad\qquad + \sum X_\tau^2$$

bringen, wo die a_ϱ, a_σ, a_τ und h reell sind, und wo betreffs der X_i das oben Bemerkte gilt. Setzen wir nun schliesslich

$$X_i = \sqrt{\varepsilon_i}\, X_i' \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

so erhalten wir A und Δ als *reelle* Funktionen der X_i', die selbst *reelle*, unabhängige Funktionen der x_i sind. Man kann, mit anderen Worten, durch eine reelle lineare Substitution A und D gleichzeitig bez. auf die Gestalt

$$\mathsf{A} = \sum a_\varrho X_\varrho'^2 + \sum a_\sigma X_\sigma'^2 \pm \sum (2a_\tau X_\tau' X_{\tau+1}' - h X_\tau'^2),$$
$$\Delta = \sum \varepsilon_\varrho X_\varrho'^2 \qquad\qquad + \sum \varepsilon_\tau X_\tau'^2$$

bringen. Die ε_i in Δ müssen aber alle entweder $+1$ oder -1 sein. Denn durch eine reelle Substitution geht eine definite Form wieder in eine definite Form gleichen Zeichens über. Ist nun z. B. D positiv, so ist auch Δ positiv, und alle ε_i müssen $+1$ sein. Denn wäre etwa $\varepsilon_1 = -1$, so wäre für $X' = 1$, $X_2' = 0$, $X_3' = 0, \ldots$ $\Delta = -1$ gegen die Voraussetzung. Setzt man schliesslich noch

$$X_\tau' = X_\tau'', \quad a_\tau X_{\tau+1}' = \frac{h}{2} X_\tau'' + X_{\tau+1}'',$$

so wird

$$2a_\tau X_\tau' X_{\tau+1}' - h X_\tau'^2 = 2 X_\tau'' X_{\tau+1}'', \quad X_\tau'^2 = X_\tau''^2,$$

sodass wir zu folgendem Resultat kommen:

Ist A eine beliebige reelle, D eine definite quadratische Form, so kann man durch eine reelle lineare Substitution A und D gleichzeitig auf die Gestalt*

$$\mathsf{A} = \sum a_\varrho X_\varrho^2 + \sum b_\sigma X_\sigma^2 + 2\sum X_\tau X_{\tau+1},$$
$$\pm\Delta = \sum X_\varrho^2 \qquad\qquad + \sum X_\tau^2$$

bringen, wo in $\pm\Delta$ r Quadrate auftreten, wenn $|D|$ vom Range r ist.

---

* Die Realität der Substitution lässt sich auch, wenn man die W.'sche Formel (6) in **65** nicht benutzen will, mittelst eines Satzes von Frobenius (SB 1896, S. 15. Vergl. die Anmerk. 2, S. 175 oben) darthun. (Briefl. Mitth. des H. Frobenius vom 5. Sept. 1896.)

Einfache Folgerungen sind:

a) Ist A eine beliebige reelle, D eine ordinäre definite Form, so kann man durch reelle lineare Substitution gleichzeitig A und D auf die Form

$$\mathsf{A} = a_1 X_1^2 + a_2 X_2^2 + \cdots + a_r X_r^2,$$
$$\pm \Delta = X_1^2 + X_2^2 + \cdots\cdots + X_n^2$$

bringen, wo r den Rang von $|A|$ bedeutet.

Hieraus geht hervor, dass sich die Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 B$, wenn eine Form derselben zugleich ordinär und definit ist, durch eine reelle Substitution auf die Gestalt

$$\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \mathsf{B} = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1) X_1^2 + \cdots + (\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n) X_n^2$$

bringen lässt (37).*

b) Sind in zwei äquivalenten Schaaren reeller quadratischer Formen

$$\lambda_1 A + \lambda_2 D \quad \textit{und} \quad \lambda_1 \bar{A} + \lambda_2 \bar{D}$$

die Formen D und $\bar{D}$ ordinär und definit gleichen Zeichens, so kann man die eine Schaar durch eine reelle, von $\lambda_1 | \lambda_2$ unabhängige lineare Substitution in die andere transformiren.

Schliesslich bemerken wir, dass man bei gegebenem n aus Theilschaaren

$$T_1 = \lambda_1 a_\varrho X_\varrho^2 + \lambda_2 X_\varrho^2, \quad T_2 = \lambda_1 b_\sigma X_\sigma^2, \quad T_3 = 2\lambda_1 X_\tau X_{\tau+1} + \lambda_2 X_\tau^2$$

eine Schaar $\lambda_1 \mathsf{A} + \lambda_2 \Delta$ zusammensetzen kann, in welcher Δ definit ist, und deren Determinante *vorgeschriebene* ET — im Sinne des Theorems XXXVII — besitzt. Hierauf lässt sich dann wieder eine *Klassifikation* der ordinären Formenpaare A, D, bei definitem D, gründen, welche von einer gewissen Zahl von Variabelen abhängen. U. s. w.

95. Wir haben bisher nur *ordinäre* Schaaren $\lambda_1 A + \lambda_2 D$ mit einer definiten Grundform D betrachtet. Zeigen nun, im Falle $\lambda_1 A + \lambda_2 D$ eine *singuläre* Schaar ist, bei definitem D die Kronecker'schen und Weierstrass'schen Invarianten der Schaar ein besonderes Verhalten, und welches? Diese Frage beantwortet folgendes Theorem:

XXXVIII. Ist φ eine beliebige reelle, ω eine definite quadratische Form von n Variabelen $x_1 \ldots x_n$, und es verschwindet die Determinante der Schaar $\lambda_1 \varphi + \lambda_2 \omega$ identisch, dann sind die Kronecker'schen Invarianten der Schaar sämmtlich gleich 1, die Elementartheiler des Koefficientensystems der Schaar sind mit

* Weierstrass, BM 1858 und 1868 [Ges W.] a. c. O.

Exponenten 1 versehen, mit Ausnahme der zur Basis λ_1 gehörigen, welch' letztere auch Exponenten 2 haben können.

Beweis. Sei die Schaar $\lambda_1\varphi + \lambda_2\omega = \psi$ singulär, $|\psi|$ vom Range r; φ und ω sollen die im Theoreme angegebene Beschaffenheit besitzen. Da $|\psi| \equiv 0$ ist, so sind die n Formen

$$\psi_i = \frac{\partial(\lambda_1\varphi + \lambda_2\omega)}{\partial x_i} = \lambda_1\varphi_i + \lambda_2\omega_i \ (i = 1, 2, \ldots n)$$

durch $n - r = \tau$ unabhängige lineare Relationen verknüpft. Sei

$$C_1\psi_1 + C_2\psi_2 + \cdots + C_n\psi_n = 0 \tag{6}$$

eine dieser Relationen, und zwar sei dieselbe vom Grade m in $\lambda_1 | \lambda_2$, also etwa

$$C_i = a_i'\lambda_1^m + a_i''\lambda_1^{m-1}\lambda_2 + \cdots + a_i^{(m+1)}\lambda_2^m \ (i = 1, 2, \ldots n).$$

Führen wir die C_i in (6) ein, so erhalten wir, da $\psi_i = \lambda_1\varphi_i + \lambda_2\omega_i$,

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\omega_1)[a_1'\lambda_1^m + a_1''\lambda_1^{m-1}\lambda_2 + a_1'''\lambda_1^{m-2}\lambda_2^2 + \cdots + a_1^{(m+1)}\lambda_2^m] \\ +(\lambda_1\varphi_2 + \lambda_2\omega_2)[a_2'\lambda_1^m + a_2''\lambda_1^{m-1}\lambda_2 + a_2'''\lambda_1^{m-2}\lambda_2^2 + \cdots + a_2^{(m+1)}\lambda_2^m] \\ \cdot \\ \cdot \\ +(\lambda_1\varphi_n + \lambda_2\omega_n)[a_n'\lambda_1^m + a_n''\lambda_1^{m-1}\lambda_2 + a_n'''\lambda_1^{m-2}\lambda_2^2 + \cdots + a_n^{(m+1)}\lambda_2^m]\end{array}\right\} = 0. \tag{7}$$

Diese Gleichung besteht aber für beliebige Werthe von $\lambda_1 | \lambda_2$; es muss daher, wenn noch

$$\varphi(xy) = y_1\varphi_1 + \cdots + y_n\varphi_n,$$

$$\omega(xy) = y_1\omega_1 + \cdots + y_n\omega_n$$

gesetzt wird,

$$\begin{cases}\varphi(a'x) = 0, \\ \varphi(a''x) + \omega(a'x) = 0, \\ \varphi(a'''x) + \omega(a''x) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi(a^{(m+1)}x) + \omega(a^{(m)}x) = 0, \\ \omega(a^{(m+1)}x) = 0\end{cases} \tag{8}$$

sein, und zwar für beliebige Werthe von $x_1, \ldots x_n$. Für $x_i = a_i''$ erhalten wir aber wegen der ersten Gleichung in (8)

$$\varphi(a'a'') = 0,$$

wegen der zweiten für $x_i = a_i'$

$$\varphi(a'a'') + \omega(a'a') = 0;$$

daher ist

$$\omega(a'a') = 0.$$

Hieraus folgt aber (93, Satz 33)

$$\omega(a'x) = 0,$$

sodass wegen der zweiten Gleichung in (8)

$$\varphi(a''x) = 0$$

ist. Ferner ist analog

$$\varphi(a''a''') = 0, \quad \omega(a''a'') = 0, \quad \omega(a''x) = 0, \quad \text{u. s. w.},$$

sodass also

$$\varphi(a'x) = \varphi(a''x) = \cdots = \varphi(a^{(m+1)}x) = 0,$$
$$\omega(a'x) = \omega(a''x) = \cdots = \omega(a^{(m+1)}x) = 0$$

ist. Der Relation (7) zu Folge bestehen also die Gleichungen

$$(9) \quad \begin{cases} a_1'\psi_1 + a_2'\psi_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_n'\psi_n = 0 \\ a_1''\psi_1 + a_2''\psi_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_n''\psi_n = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1^{(m+1)}\psi_1 + a_2^{(m+1)}\psi_2 + \cdots + a_n^{(m+1)}\psi_n = 0. \end{cases}$$

Da nicht alle $a_i^{(\varkappa)}$ in (7) Null sind, so ist also jede lineare Relation (7) zwischen den ψ_i, die in $\lambda_1 \mid \lambda_2$ höheren als nullten Grades ist, selbst eine lineare Verbindung solcher linearen Relationen (9) zwischen den ψ_i, die von $\lambda_1 \mid \lambda_2$ *unabhängig* sind. Sind nun $R_1 = 0$, $R_2 = 0, \ldots R_{\tau'} = 0$ τ' unabhängige Relationen zwischen den ψ_i, die von $\lambda_1 \mid \lambda_2$ *nicht* abhängen, alle anderen linearen, von $\lambda_1 \mid \lambda_2$ unabhängigen Relationen zwischen den ψ_i aber lineare Verbindungen dieser τ' Relationen, so ist nach Voraussetzung τ' nicht grösser als τ; τ' kann aber auch nicht kleiner als τ sein, da sonst *alle* zwischen den ψ_i bestehenden linearen Relationen sich durch weniger als τ unabhängige Relationen linear ausdrücken liessen. Folglich ist $\tau' = \tau$; *die Minimalgradzahlen der Schaar* $\lambda_1\varphi + \lambda_2\omega$ *sind mithin alle gleich Null, die* Kronecker'schen *Invarianten der Schaar gleich Eins.*

Das Gleiche gilt für die singuläre Schaar von *symmetrischen* bilinearen Formen $\lambda_1\varphi(xy) + \lambda_2\omega(xy) = \psi(xy)$ (63). Man kann daher $\varphi(xy)$ und $\omega(xy)$ gleichzeitig linear so transformiren, dass τ Variabele aus jeder Reihe von Veränderlichen wegfallen. Die hierzu nöthigen Substitutionen sind *reell* und in Folge der Symmetrie von $\psi(xy)$ *congruent* (53). Man kann also die singuläre Schaar von quadratischen Formen $\lambda_1\varphi + \lambda_2\omega$ durch *eine reelle, von* $\lambda_1 \mid \lambda_2$ *unabhängige Substitution* in eine solche transformiren, die nur noch $n - \tau = r$ Variabelen abhängt. Die letztere wollen wir mit $\lambda_1\overline{\varphi} + \lambda_2\overline{\omega} = \overline{\psi}$ bezeichnen; die Schaar $\overline{\psi}$ ist, wenn man sie als eine von den wirklich in ihr auftretenden r Variabelen abhängige Schaar auffasst, ordinär, $\overline{\omega}$ ist

definit, weil ω definit ist, also haben alle ET von $|\lambda_1\overline{\varphi} + \lambda_2\overline{\omega}|$ Exponenten 1, bis auf die zur Basis λ_1 gehörigen, welche auch Exponenten 2 haben können. Nun sind aber die ET des Systems von $|\lambda_1\varphi + \lambda_2\omega|$ identisch mit den ETn von $|\lambda_1\overline{\varphi} + \lambda_2\overline{\omega}|$; daher haben dieselben in der That die angegebene Beschaffenheit.

Man kann nach 94 singuläre Schaaren $\lambda_1\varphi + \lambda_2\omega$ mit definitem ω bilden, die von einer gegebenen Anzahl Variabelen abhängen und — im Sinne unseres Theorems XXXVIII — *vorgeschriebene* Kronecker'*sche und* Weierstrass'*sche Invarianten* besitzen, sodass eine *Klassifikation* der singulären Paare quadratischer, von einer gegebenen Anzahl von Variabelen abhängiger Formen φ, ω bei definitem ω möglich ist. Die Paare jeder Klasse ordinärer Formenpaare (94) sowohl, als singulärer Formenpaare können durch *reelle* lineare Substitution auf eine Normalform gebracht werden, die aus 94 zu entnehmen ist.

§ 15. Lineare Elementartheiler.

96. Wir sind im Laufe unserer Untersuchungen wiederholt Formenschaaren begegnet, deren Determinanten *nur* lineare ET besassen. Im Folgenden wollen wir uns nun mit solchen Schaaren befassen, deren Determinanten (Koefficientensysteme) *überhaupt* lineare ET haben. Wir werden dabei eine, im Wesentlichen von Cauchy* herstammende, Methode kennen lernen, die Stickelberger** benutzt, um von einer beliebigen Schaar quadratischer oder bilinearer Formen diejenigen elementaren Schaaren abzusondern, welche den linearen ETn der Determinante (des Koefficientensystems) der Schaar entsprechen.

Nach dem in 37 Auseinandergesetzten kann man Untersuchungen über die ET der Determinante einer Schaar $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ zurückführen auf solche über die ET der Determinante einer Schaar $f - \lambda g$. Man kann dabei die Umformung der Schaar so vornehmen, dass jedem zu einer bestimmten Basis $a\lambda_1 + b\lambda_2$ gehörenden ET des Systems von

$$|\lambda_1 A + \lambda_2 B|$$

ein *zur Basis* λ gehörender ET gleichen Grades desjenigen von

$$|f - \lambda g|$$

entspricht. Dadurch werden viele Untersuchungen über ET bedeutend vereinfacht. — Noch eine zweite Bemerkung werde vorausgeschickt, ehe wir die Stickelberger'schen Entwickelungen vorführen. Ist

$$f(xy) = \sum a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n)$$

* Cauchy, Exerc. de math. IV (1829), p. 140.

** Stickelberger, a. S. 174 c. O. § 7. Vergl. auch die Einleitung zu dieser Arbeit.

eine bilineare Form von $2n$ Variabelen, bedeutet ferner $f_1(xy)$ diejenige Form von $2m$ Variabelen, welche aus f dadurch hervorgeht, dass man

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0,$$
$$y_{m+1} = y_{m+2} = \cdots = y_n = 0$$

setzt, dann kann man, wenn die Determinante von $f_1(xy)$ nicht Null ist, m lineare Formen $\xi_1, \ldots \xi_m$ von $x_{m+1}, \ldots x_n$ und m lineare Formen $\eta_1, \ldots \eta_m$ von $y_{m+1}, \ldots y_n$ so bestimmen, dass

(1) $$f(xy) - f_1(x_1 + \xi_1, \ldots x_m + \xi_m;\ y_1 + \eta_1, \ldots y_m + \eta_m) = f_2(xy)$$

von $x_1, \ldots x_m, y_1, \ldots y_m$ unabhängig ist.

Dazu ist nämlich erforderlich, dass die $2m$ Gleichungen

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_\mu} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_\mu} = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots m)$$

erfüllt sind. Führt man die Differentiation aus, so erhält man aus ihnen

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} a_{\alpha\mu}\xi_\alpha &= \sum_{\alpha=m+1}^{\alpha=n} a_{\alpha\mu} x_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} a_{\mu\alpha}\eta_\alpha &= \sum_{\alpha=m+1}^{\alpha=n} a_{\mu\alpha} y_\alpha \end{aligned}\right\} (\mu = 1, 2, \ldots m);$$

da aber $\sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{mm} \neq 0$ ist, so kann man hieraus die $\xi_\alpha(\eta_\alpha)$ als lineare Formen der $x_\alpha(y_\alpha)$ berechnen; diese $\xi_\alpha(\eta_\alpha)$ erfüllen die gestellte Forderung. Ist $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, so werden die $\xi_1 \ldots \xi_m$ *dieselben* Funktionen der $x_{m+1}, \ldots x_n$, wie die $\eta_1, \ldots \eta_m$ der $y_{m+1}, \ldots y_n$.

a) Dies vorausgeschickt, sei nun f eine bilineare Form von $2n$ Variabelen mit einer Determinante $|f|$ vom Range $n-1$; ist alsdann

(2) $$g = \sum b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n)$$

eine weitere beliebige bilineare Form von $2n$ Variabelen, so ist wegen $|f| = 0$ die Determinante

$$|f - \lambda g|$$

für $\lambda = 0$ gleich Null. Setzt man in $|f|$

$$\text{adj. } a_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta},$$

so wird die Ableitung von $|f - \lambda g|$ nach λ für $\lambda = 0$ gleich

(3) $$-\sum b_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n).$$

Die Determinante $|f - \lambda g|$ ist also durch eine höhere Potenz von λ als die erste theilbar oder nicht, je nachdem (3) Null ist oder nicht. Genügen nun $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$ den $2n$ linearen Gleichungen

(4) $$\frac{\partial f}{\partial y_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots n),$$

so sind, wie leicht einzusehen ist, die Produkte $x_\alpha y_\beta$ proportional zu den $A_{\alpha\beta}$. Ist daher für diese x_α, y_α

$$\sum b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2 \ldots n),$$

so ist auch (3) gleich Null, und λ steckt zu höherer als erster Potenz in $|f - \lambda g|$; ist aber $\sum b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \neq 0$, so verschwindet (3) nicht, und λ steckt in $|f - \lambda g|$ nur zur ersten Potenz. Dieses benutzen wir sofort zum Beweise des Satzes von Stickelberger.*

34) Wenn die Determinante der bilinearen Form $f = \sum\limits_{(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n)} a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ *verschwindet, und die Form* $g = \sum\limits_{(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n)} b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ *für jede Lösung der Gleichungen*

$$\frac{\partial f}{\partial y_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

Null ist, so hat die Determinante $|f - \lambda g|$ *(das System von* $|f - \lambda g|$*) keinen zur Basis* λ *gehörenden linearen Elementartheiler.*

Beweis. Der Rang von $|f|$ sei gleich $m - 1$; dann sind nicht alle Subdeterminanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades von $|f - \lambda g|$ durch λ theilbar. Verschwinden daher alle Subdeterminanten m^{ten} Grades von $|f - \lambda g|$ identisch, so besitzt das System dieser Determinante überhaupt keinen zur Basis λ gehörigen ET. Ist aber $|f - \lambda g|$ vom Range m oder einem höheren Range, so beweisen wir den Satz, wie folgt. Wir greifen eine Subdeterminante m^{ten} Grades des Systems von $|f|$ heraus, deren Subdeterminanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades nicht alle Null sind; durch passende Anordnung der Variabelen x_α, y_β können wir bewirken, dass diese Determinante m^{ten} Grades gerade $\sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{mm}$ wird. Seien ferner f_1 und g_1 die Formen, welche man erhält, indem man in f und g die Variabelen $x_{m+1}, \ldots x_n$, $y_{m+1}, \ldots y_n$ Null setzt. Verstehen wir jetzt unter $x_1, \ldots x_m$, $y_1, \ldots y_m$ diejenigen Werthe von x_α, y_α, welche die Gleichungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots m)$$

befriedigen, dann verschwinden für diese Werthe von $x_1, \ldots x_m$, $y_1, \ldots y_m$ und für $x_{m+1} = \cdots = x_n = 0$, $y_{m+1} = \cdots = y_n = 0$ die Ableitungen von f nach den x_α, $y_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots n)$. Wir haben damit also eine Lösung der Gleichungen (4). Für diese muss nach Voraussetzung $g = 0$ sein,

* Stickelberger, l. c. S. XIII, Satz VI.

sodass g_1 für die eben bestimmten Werthe von $x_1, \dots x_m, y_1, \dots y_m$ Null sein muss. Nach dem oben zu Anfang dieses Abschnittes a) Gesagten steckt also λ in $|f_1 - \lambda g_1|$ *zu höherer, als erster Potenz.* Zum gleichen Resultate gelangen wir, wenn wir unter $\sum \pm a_{11} \cdots a_{mm}$ eine Subdeterminante m^{ten} Grades von $|f|$ verstehen, deren sämmtliche Subdeterminanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades Null sind, da alsdann der für f_1 und g_1 gebildete Ausdruck (3) Null ist.

Ist daher λ^e die höchste Potenz von λ, welche in allen Subdeterminanten m^{ten} Grades von $|f - \lambda g|$ auftritt, so ist $e > 1$; in allen Subdeterminanten $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades von $|f - \lambda g|$ kann aber nach Voraussetzung λ nicht auftreten; daher besitzt das System von $|f - \lambda g|$ den ET λ^e von höherem, als vom ersten Grade. Besitzt dasselbe noch weitere ET mit der Basis λ, so sind dieselben nach Theorem I in 5 vom Grade e oder von höherem. Damit ist unser Satz bewiesen.

b) Derselbe ist ein Specialfall des allgemeineren Theorems von Stickelberger:*

XXXIX. Ist der Rang der Determinante der bilinearen Form $f = \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \dots n)$ gleich $n - l\ (l > 0)$, sind

(5) $$x_{1\lambda}, \dots x_{n\lambda}, \quad y_{1\lambda}, \dots y_{n\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots l)$$

je l unabhängige Lösungen der Gleichungen

(4) $$\frac{\partial f}{\partial y_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots n),$$

und ist m der Rang des Systems der l^2 Grössen

(6) $$g_{\varkappa\lambda} = \sum b_{\alpha\beta} x_{\alpha\varkappa} y_{\beta\lambda} \quad \binom{\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots l}{\alpha, \beta = 1, 2, \dots n},$$

so hat die Determinante (das System der Determinante) $|f - \lambda g|$, wo $g = \sum b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \dots n)$, genau m lineare Elementartheiler mit der Basis λ.

Vor Allem ist zu bemerken, dass die Zahl m unabhängig davon ist, welche l linear unabhängigen Lösungen der Gleichungen (4) gewählt werden. Wenn man nämlich statt der ursprünglich gewählten Lösungen l andere einführt, so ist dies gleichbedeutend mit einer linearen Transformation der bilinearen Form

$$\sum g_{\varkappa\lambda} u_\varkappa v_\lambda \quad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots l);$$

durch eine solche bleibt aber der Rang von $|g_{\varkappa\lambda}|$ ungeändert.

Ist $m = 0$, d. h. verschwinden alle $g_{\varkappa\lambda}$, so behauptet unser Satz, dass das System von $|f - \lambda g|$ keinen linearen ET mit der Basis λ

* Stickelberger, l. c. Satz VII.

besitze. Da alsdann $\sum b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ für *alle* Lösungen von (4) Null wird, so ist dies in der That nach Satz 34) der Fall. Unser Satz XXXIX ist daher *für* $m = 0$ *schon bewiesen;* wir setzen nunmehr $m > 0$ voraus.

Geht durch lineare Substitutionen P, Q, welche für die x_α lineare Formen der x'_α, für die y_β lineare Formen der y'_β einführen, die Form f in $F = \sum a'_{\alpha\beta} x'_\alpha y'_\beta$, die Form g in $G = \sum b'_{\alpha\beta} x'_\alpha y'_\beta$ über, so bleibt die Zahl m ungeändert. Denn setzen wir für den Augenblick

$$\frac{\partial f}{\partial y_\alpha} = f_\alpha(x), \quad \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = f(y)_\alpha$$

und die linearen Formen, in welche die $f_\alpha(x)$ und $f(y)_\alpha$ übergehen, bez. gleich $f'_\alpha(x')$ und $f'(y')_\alpha$, so sei für

$$\frac{\partial F}{\partial y'_\alpha} = F_\alpha(x'), \quad \frac{\partial F}{\partial x'_\alpha} = F(y')_\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} F_\alpha(x') &= c_{\alpha 1} f'_1(x') + c_{\alpha 2} f'_2(x') + \cdots + c_{\alpha n} f'_n(x') \\ F(y')_\alpha &= d_{\alpha 1} f'(y')_1 + d_{\alpha 2} f'(y')_2 + \cdots + d_{\alpha n} f'(y')_n \end{aligned}\right\} (\alpha = 1, 2, \ldots n),$$

wo die Determinanten $\sum \pm c_{11} \ldots c_{nn}$ und $\sum \pm d_{11} \ldots d_{nn}$ nicht Null sind. Nun hat man doch, um $G_{\varkappa\lambda}$, d. h. um $g_{\varkappa\lambda}$ für die transformirten Formen F und G zu bilden, zunächst die $2n$ Gleichungen $F_\alpha(x') = 0$ und $F(y')_\alpha = 0$ zu lösen. Der Rang ihrer Determinanten ist $n - l$, ebenso sind die Determinanten der Gleichungen $f'_\alpha(x') = 0$ und $f'(y')_\alpha = 0$ vom Range $n - l$, da z. B. f in $y_1 f'_1(x') + \cdots + y_n f'_n(x')$ durch die lineare Substitution P übergeht. Wir können und wollen daher als Lösungen $x'_{1\lambda}, \ldots\ y'_{1\lambda}, \ldots$ der Gleichungen $F_\alpha(x') = 0$, $F(y')_\alpha = 0$ diejenigen Werthe von x'_α, y'_α wählen, welche den Werthen (5) vermöge der linearen Beziehungen P und Q bez. entsprechen. Dann ist aber geradezu

$$G_{\varkappa\lambda} = \sum b'_{\alpha\beta} x'_{\alpha\varkappa} y'_{\beta\lambda} = \sum b_{\alpha\beta} x_{\alpha\varkappa} y_{\beta\lambda} = g_{\varkappa\lambda};$$

die Zahl m bleibt also in der That ungeändert.

Da ferner die ET der Systeme von $|f - \lambda g|$ und $|F - \lambda G|$ übereinstimmen, so ist evident, dass unser Satz XXXIX bewiesen ist, wenn er für irgend eine zu $f - \lambda g$ äquivalente Form $F - \lambda G$ bewiesen ist. Nun zum Beweise selbst!

Sei von den Subdeterminanten des Systems der $g_{\varkappa\lambda}$ gerade die Determinante $\sum \pm g_{11} g_{22} \cdots g_{mm}$ von Null verschieden. Dies kann durch passende Anordnung der Lösungen (5) stets erreicht werden. Sind die Formen f und g *symmetrisch*, so kann man in (5)

$$x_{\alpha\lambda} = y_{\alpha\lambda} \quad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots l \\ \alpha = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix}$$

nehmen. Dann wird

$$g_{\varkappa\lambda} = \sum b_{\alpha\beta} x_{\alpha\varkappa} x_{\beta\lambda}, \quad g_{\lambda\varkappa} = \sum b_{\alpha\beta} x_{\alpha\lambda} x_{\beta\varkappa} = \sum b_{\beta\alpha} x_{\alpha\lambda} x_{\beta\varkappa} = \sum b_{\alpha\beta} x_{\alpha\varkappa} x_{\beta\lambda},$$

also

$$g_{\varkappa\lambda} = g_{\lambda\varkappa};$$

d. h. das System der $g_{\varkappa\lambda}$ wird symmetrisch. Ist nun von vornherein die Determinante $\sum \pm g_{11} \dots g_{mm}$ nicht von Null verschieden, so kann man die bilineare Form $\sum g_{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$ durch congruente Transformationen in eine andere überführen, für welche jene Determinante nicht Null wird. Dies geht unmittelbar aus Artikel 7 (vergl. Satz 6) daselbst) hervor, wenn man die Elemente des Systems der $g_{\varkappa\lambda}$ als ganze Funktionen einer Variabelen vom Grade Null auffasst.* *Man kann also*, mit anderen Worten, *im Falle der Symmetrie von f und g die Lösungen (5) so wählen, dass $x_{\alpha\lambda} = y_{\alpha\lambda}$ und $\sum \pm g_{11} \dots g_{mm}$ nicht Null wird.*

Wir setzen nun

(7) $$p_{1\mu} = x_{1\mu}, \dots p_{n\mu} = x_{n\mu}; \quad q_{1\mu} = y_{1\mu}, \dots q_{n\mu} = y_{n\mu}$$

für $\mu = 1, 2, \dots m$; alsdann wählen wir Grössen

(8) $$p_{1\nu}, \dots p_{n\nu}; \quad q_{1\nu}, \dots q_{n\nu} \; (\nu = m+1, m+2, \dots n)$$

ganz beliebig, aber so, dass die Determinanten

$$\sum \pm p_{11} \dots p_{nn}, \quad \sum \pm q_{11} \dots q_{nn}$$

nicht verschwinden. Das ist immer möglich, weil die Lösungen (5) unabhängig sind. Dann gehe durch die Substitutionen

(9) $$x_\alpha = p_{\alpha 1} x_1' + \dots + p_{\alpha n} x_n', \quad y_\alpha = q_{\alpha 1} y_1' + \dots + q_{\alpha n} y_n' \; (\alpha = 1, 2, \dots n)$$

$f - \lambda g$ über in $F - \lambda G$, wo wieder $F = \sum a'_{\alpha\beta} x'_\alpha y'_\beta$ u. s. w. Dabei ist

$$a'_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{\gamma=n} \sum_{\delta=1}^{\delta=n} a_{\gamma\delta} p_{\gamma\alpha} q_{\delta\beta} = \sum_{\delta=1}^{\delta=n} \left(q_{\delta\beta} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=n} a_{\gamma\delta} p_{\gamma\alpha} \right)$$
$$= \sum_{\gamma=1}^{\gamma=n} \left(p_{\gamma\alpha} \sum_{\delta=1}^{\delta=n} a_{\gamma\delta} q_{\delta\beta} \right).$$

Daher wird, wenn mindestens eine der Zahlen $\alpha, \beta \leqq m$ ist,

(10) $$a'_{\alpha\beta} = 0,$$

da vorausgesetzt wird, dass die Grössen (7) den Gleichungen (4) genügen.

Nun hat man weiter

(11) $$b'_{\varkappa\lambda} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\alpha\beta} p_{\alpha\varkappa} q_{\beta\lambda} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\alpha\beta} x_{\alpha\varkappa} y_{\beta\lambda} = g_{\varkappa\lambda}$$

für $\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots m$. Also ist

* Vergl. auch Frobenius, Crelle's Journ. (77) Bd. 82, S. 242; (95) Bd. 114, S. 192. Gundelfinger, Crelle's Journ. (81) Bd. 91, S. 229.

$$\sum \pm b'_{11} \ldots b'_{mm} = \sum \pm g_{11} \ldots g_{mm} \neq 0;$$

man kann daher nach dem zu Eingang dieses Artikels Gesagten [vergl. Gleichung (1)],

$$G = G_1(x'_1 + \xi_1, \ldots x'_m + \xi_m;\ y'_1 + \eta_1, \ldots y'_m + \eta_m) + G_2$$

setzen, wo $\xi_1, \ldots \xi_m$ nur von

$$x'_{m+1}, \ldots x'_n,$$

$\eta_1, \ldots \eta_m$ nur von

$$y'_{m+1}, \ldots y'_n$$

linear abhängen, und wo G_2 nur von den Variabelen $x'_{m+1}, \ldots x'_n$ und $y'_{m+1}, \ldots y'_n$ linear abhängt. Setzen wir deshalb in $F - \lambda G$

$$(12)\begin{cases} x'_1 + \xi_1 = x''_1,\ x'_2 + \xi_2 = x''_2, \ldots x'_m + \xi_m = x''_m,\ x'_{m+1} = x''_{m+1}, \ldots x'_n = x''_n, \\ y'_1 + \eta_1 = y''_1,\ y'_2 + \eta_2 = y''_2, \ldots y'_m + \eta_m = y''_m,\ y'_{m+1} = y''_{m+1}, \ldots y'_n = y''_n \end{cases}$$

und schreiben dann wieder x'_α für x''_α, y'_β für y''_β, so erhalten wir, da nach (10) die Form F nur von $x'_{m+1}, \ldots x'_n$, $y'_{m+1} \ldots y'_n$ abhängt,

$$(13) \qquad -\lambda G_1 + F - \lambda G_2,$$

wo G_1 von $x'_1, \ldots x'_m$, $y'_1, \ldots y'_m$, F und G_2 aber von $x'_{m+1}, \ldots x'_n$, $y'_{m+1}, \ldots y'_n$ abhängen. Seiner Definition nach ist nach wie vor

$$G_1 = \sum b'_{\alpha\beta} x'_\alpha y'_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots m),$$

sodass wegen (11)

$$G_1 = \sum g_{\alpha\beta} x'_\alpha y'_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots m)$$

wird.

Die Form (13) ist in die Theile $-\lambda G_1$ und $F - \lambda G_2$ *zerlegbar*. Die ET ihres Koefficientensystems sind daher diejenigen von $|-\lambda G_1|$ und die des Koefficientensystems von $F - \lambda G_2$ zusammengenommen. Die Form $-\lambda G_1$ kann nämlich nicht identisch Null sein, da $|G_1| \neq 0$ ist. Die Determinante $|-\lambda G_1|$ hat aber *m lineare ET mit der Basis* λ. Kann man also nachweisen, dass das Koefficientensystem von $F - \lambda G_2$ keinen linearen ET mit der Basis λ besitzt, so ist der Beweis unseres Theorems geliefert.

Dieser Nachweis ist aber mittelst des Satzes 34) erbringlich. Wir zeigen einfach, dass G_2 *für jede Lösung* der Gleichungen

$$(14) \qquad \frac{\partial F}{\partial y'_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x'_\alpha} = 0 \quad (\alpha = m+1, \ldots n)$$

Null ist. Dann giebt es nach jenem Satze keinen ET λ des Systems von $|F - \lambda G_2|$. Angenommen nämlich

$$x'_{m+1,\,m+1}, \ldots x'_{n,\,m+1}, \quad y'_{m+1,\,m+1}, \ldots y'_{n,\,m+1}$$

wäre eine Lösung von (14), für welche G_2 nicht verschwände. Alsdann mögen noch

$$x'_{\alpha\mu},\ y'_{\alpha\mu} \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots n \\ \mu = 1, 2, \ldots m \end{pmatrix}$$

die Zahlen 0 oder 1 bedeuten, je nachdem $\alpha = \mu$ oder $\alpha \neq \mu$ ist. Da

$$\frac{\partial F}{\partial y'_\alpha} \equiv 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x'_\alpha} \equiv 0,$$

ist für $\alpha = 1, 2, \dots m$, so stellen

$$x'_{1\mu}, \dots x'_{n\mu}, \quad y'_{1\mu}, \dots y'_{n\mu} \quad (\mu = 1, 2, \dots m)$$

m unabhängige Lösungen der Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial y'_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x'_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots n)$$

vor; man kann aber sofort noch eine $(m+1)^{\text{te}}$ Lösung dieser Gleichungen angeben, nämlich

$$x'_{1,\,m+1}, \dots x'_{n,\,m}, \quad y'_{1,\,m+1}, \dots y'_{n,\,m+1},$$

wo

$$x'_{\mu,\,m+1} = y'_{\mu,\,m+1} = 0$$

zu setzen ist für $\mu = 1, 2, \dots m$. Bildet man nun für die Formen F und $G = G_1 + G_2$ die Ausdrücke $g_{\varkappa\lambda}$ und bezeichnet dieselben entsprechend mit $G_{\varkappa\lambda}$, so wird

$$G_{\varkappa\lambda} = b'_{\varkappa\lambda} - g_{\varkappa\lambda} \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots m),$$

ferner

$$G_{\varkappa,\,m+1} = G_{m+1,\,\lambda} = 0 \quad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \dots m),$$

aber

$$G_{m+1,\,m+1} \neq 0,$$

da

$$G_{m+1,\,m+1} = G_2(x'_{m+1,\,m+1}, \dots x_{m+1,\,n};\; y'_{m+1,\,m+1}, \dots y'_{m+1,\,n})$$

nach Voraussetzung nicht Null ist. Es gäbe daher eine Subdeterminante $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades des Systems der $G_{\varkappa\lambda}$, die nicht Null ist, nämlich

$$\sum \pm G_{11} \dots G_{m+1,\,m+1} = G_{m+1,\,m+1} \cdot \sum \pm G_{11} \dots G_{mm}$$
$$= G_{m+1,\,m+1} \cdot \sum \pm g_{11} \dots g_{mm}.$$

Das System der $G_{\varkappa\lambda}$ hätte einen höheren Rang, als den Rang m, was nach dem zu Anfang des Abschnittes b) Bemerkten nicht sein kann. Unsere Annahme ist daher unzulässig, G_2 verschwindet für jede Lösung der Gleichung (14). Damit ist unser Theorem vollständig bewiesen.

Wir haben soeben die Schaar $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ in eine Schaar transformirt, die in die Theile $\lambda_1 F + \lambda_2 G_2$ und $\lambda_2 G_1$ zerlegbar ist. Da nun $|G_1| \neq 0$ ist, so lässt die Theilschaar $\lambda_2 G_1$, wie ohne Weiteres klar ist, sich auf die Gestalt

$$\lambda_2 (x''_1 y''_1 + \cdots + x''_m y''_m)$$

bringen. Die hierzu nöthige Substitution lässt $\lambda_1 F + \lambda_2 G_2$ unberührt. Daraus geht hervor, dass man in der That mittelst der hier entwickelten Methode eine beliebige Schaar $\lambda_1 f + \lambda_2 g$, deren Koefficientensystem ϱ lineare ET besitzt, in eine Schaar $T_1 + T_2 + \cdots + T_\varrho + R$ transformiren kann, die in die Theile $T_1, \dots T_\varrho$, R zerlegbar ist, und in welcher $T_1, T_2, \dots T_\varrho$ *elementare* ordinäre Theilschaaren vorstellen

derart, dass die ET von $|T_1|, |T_2|, \ldots |T_\varrho|$ gerade jene ϱ *linearen* ET vorstellen.

Wir haben uns zum Schlusse mit dem Falle zu beschäftigen, wo f und g *symmetrische* bilineare Formen sind. Zunächst erhält man, wenn man f und g symmetrisch annimmt aus 34) und XXXIX zwei Sätze über quadratische Formen (63), die man selbst aussprechen wolle. Da ferner im Falle der Symmetrie oben $x_{\alpha\lambda} = y_{\alpha\lambda}$ angenommen werden konnte, so kann man hier die Transformationen (9) congruent nehmen, sodass F und G ebenfalls symmetrisch werden; die weiteren Transformationen (12) sind aber ebenfalls congruent (vergl. den Anfang dieses Artikels), sodass schliesslich auch G_1 und G_2 symmetrisch werden. G_1 kann aber in $x_1''y_1'' + \cdots + x_m''y_m''$ durch congruente Transformationen übergeführt werden (Satz 19 in 76). Aus Allem diesen geht hervor, *dass durch die oben entwickelte Methode von jeder Schaar von quadratischen Formen diejenigen elementaren Schaaren abgespalten werden können, welche den linearen ETn ihres Koefficientensystems entsprechen.*

Wir haben in den letzten Paragraphen — abgesehen von vorstehendem Excurse über lineare ET — zahlreiche algebraische Anwendungen der Weierstrass'schen und Kronecker'schen Theorieen gebracht. Wir geben nun im Folgenden eine Anwendung, welche die Weierstrass'schen Entwickelungen im Gebiete der linearen Differentialgleichungen finden.

§ 16. Integration eines Systems linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koefficienten.*

97. Wir verstehen im Folgenden unter $x_1, x_2, \ldots x_n$ Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen t. Ist für n solche Funktionen ein System von n linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koefficienten gegeben, so lässt es sich immer auf die Form

$$(1) \qquad \sum a_{ik} \frac{dx_i}{dt} = \sum b_{ik} x_i \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

bringen, wo die a_{ik}, b_{ik} Konstante vorstellen. Denn treten in den gegebenen Gleichungen höhere Ableitungen, tritt z. B. $\frac{d^2 x_i}{dt^2}$ auf, so setzt man

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i',$$

wodurch

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{dx_i'}{dt}$$

wird. Dadurch erhält man ein System von $n+1$ Gleichungen für $n+1$ Funktionen $x_1, \ldots x_i, x_i', \ldots x_n$, in welchem nur die erste Ableitung von x_i' auftritt, u. s. w.

* Weierstrass, Ges. W. Bd. II, S. 75—76.

Wir können erstens voraussetzen, dass die n Gleichungen (1) *unabhängig* sind; zweitens dürfen wir voraussetzen, dass sich unser System (1) in kein anderes umformen lässt, in dem *weniger* als n unbekannte Funktionen x_i von t auftreten.

Nun componiren wir das System (1) mit n unbestimmten Konstanten $y_1, y_2, \dots y_n$. Wir erhalten dann

$$\sum a_{ik} \frac{dx_i}{dt} y_k = \sum b_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

oder, wenn wir

$$\sum a_{ik} x_i y_k = \varphi(xy), \quad \sum b_{ik} x_i y_k = \psi(xy) \quad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

setzen,

(2) $$\frac{d\varphi(xy)}{dt} = \psi(xy).$$

Die Determinante der bilinearen Form $\varphi(xy)$ der Veränderlichen $x_1, \dots x_n$, $y_1, \dots y_n$ ist nicht gleich Null. Wäre nämlich $|\varphi| = 0$, dann könnte man den unbestimmten Grössen y_k solche Werthe b_k geben, dass

$$\varphi(xb) \equiv 0$$

wäre. Dann wäre nach (2)

(3) $$\psi(xb) = 0.$$

Wäre nun $\psi(xb)$ *für alle Werthe* von $x_1, x_2, \dots x_n$ Null, so bestände zwischen den Gleichungen (1) eine lineare Relation, was gegen unsere erste Voraussetzung verstossen würde. Daher ist $\psi(xb)$ in den x_i nicht identisch Null. Man kann also vermöge (3) eine der Funktionen x_i durch die übrigen $n-1$ linear ausdrücken. Unter der Annahme $|\varphi| = 0$ liesse sich mithin das Gleichungssystem (1) in ein solches umformen, das nur $n-1$ unbekannte Funktionen x_i von t enthält, gegen unsere zweite Voraussetzung. *Die Determinante von φ ist also von Null verschieden.*

Wir können daher, wenn

$$(\lambda - c_1)^{e_1}, \quad (\lambda - c_2)^{e_2}, \dots (\lambda - c_m)^{e_m}$$

die sämmtlichen ET der Determinante $|\lambda\varphi - \psi|$ vorstellen, nach Artikel 46 (Schluss) durch lineare Substitutionen $\varphi(xy)$ und $\psi(xy)$ gleichzeitig bez. in

$$\Phi = \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma}, \; \Psi = \sum c_\sigma (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} + \sum (X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1} \; (\sigma = 1, 2, \dots m)$$

überführen. Dabei ist

$$(X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma} = \sum X_{\sigma\mu} Y_{\sigma\nu} \quad (\mu + \nu = e_\sigma - 1),$$

und $(X_\sigma Y_\sigma)_{e_\sigma - 1}$ für $e_\sigma = 1$ gleich Null zu setzen; ferner ist

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_m = n.$$

Durch diese Substitution geht die Gleichung (2) in

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Psi$$

über. Ausführlicher lautet diese Gleichung

$$(4)\qquad \sum_{\sigma}\sum_{(\mu+\nu=e_\sigma-1)} \frac{dX_{\sigma\mu}}{dt} Y_{\sigma\nu} = \sum_{\sigma}\sum_{(\mu+\nu=e_\sigma-1)} c_\sigma X_{\sigma\mu} Y_{\sigma\nu} + \sum_{\sigma}\sum_{(\mu+\nu=e_\sigma-2)} X_{\sigma\mu} Y_{\sigma\nu}.$$

Nun gilt aber die Gleichung (2) für beliebige Werthe von

$$y_1, y_2, \ldots y_n;$$

also gilt Dasselbe für die Gleichung (4) und die $Y_{\sigma\nu}$, und es folgen daher aus (4) die n Gleichungen

$$(5)\ \frac{dX_{\sigma 0}}{dt} = c_\sigma X_{\sigma 0},\quad \frac{dX_{\sigma 1}}{dt} = c_\sigma X_{\sigma 1} + X_{\sigma 0}, \ldots \frac{dX_{\sigma, e_\sigma - 1}}{dt} = c_\sigma X_{\sigma, e_\sigma - 1} + X_{\sigma, e_\sigma - 2}$$
$$(\sigma = 1, 2, \ldots m).$$

Dieses System von n linearen Differentialgleichungen, in welches wir das gegebene umformt haben, zerfällt in m Gruppen von Gleichungssystemen; jede Gruppe entspricht einem ET von $|\lambda\varphi - \psi|$ und enthält soviele Gleichungen, als der Exponent des zugehörigen ETs angiebt.

Dasselbe kann aber sofort integrirt werden. Setzen wir nämlich in (5) kürzer

$$c_\sigma = c,\quad X_{\sigma\mu} = X_{\mu+1};\quad e_\sigma = \varepsilon,$$

so erhalten wir

$$(6)\qquad \frac{dX_1}{dt} = cX_1,\quad \frac{dX_2}{dt} = cX_2 + X_1, \ldots\quad \frac{dX_\varepsilon}{dt} = cX_\varepsilon + X_{\varepsilon-1}.$$

Nun bedeute e die Basis der natürlichen Logarithmen; multiplicirt man jede der Gleichungen (6) mit e^{-ct}, so ergiebt sich

$$(7)\qquad \frac{d(X_1 e^{-ct})}{dt} = 0,\quad \frac{d(X_2 e^{-ct})}{dt} = X_1 e^{-ct}, \ldots\quad \frac{d(X_\varepsilon e^{-ct})}{dt} = X_{\varepsilon-1} e^{-ct},$$

und hieraus durch Integration der ersten Gleichung, wenn $A_1, A_2, \ldots$ Konstante bedeuten,

$$X_1 = A_1 e^{ct},$$

wegen der zweiten Gleichung in (7) somit

$$\frac{d(X_2 e^{-ct})}{dt} = X_1 e^{-ct} = A_1,$$

und weiter durch Integration

$$X_2 = (A_1 t + A_2) e^{ct};$$

analog folgt

$$\frac{d(X_3 e^{-ct})}{dt} = A_1 t + A_2,\quad X_3 = \left(\frac{A_1}{2} t^2 + A_2 t + A_3\right) e^{ct},$$

u. s. w., schliesslich

$$X_\varepsilon = \left(\frac{A_1 t^{\varepsilon-1}}{(\varepsilon-1)!} + \frac{A_2 t^{\varepsilon-2}}{(\varepsilon-2)!} + \cdots + A_\varepsilon\right) e^{ct}.$$

So verfährt man mit jeder der m Gruppen. Damit ist das System (5) integrirt, aber auch wegen des bekannten linearen Zusammenhangs zwischen den $X_{\sigma\mu}$ und x_i das System (1). Die Konstanten $A_1, A_2, \ldots$ sind die Werthe, die $X_1, X_2, \ldots$ für $t = 0$ annehmen. Vermittelst eben dieser linearen Gleichungen kann man also auch die Konstanten $A_1, A_2, \ldots$ aus den Werthen berechnen, die $x_1, x_2, \ldots x_n$ für $t = 0$ annehmen sollen.

Besonders einfach gestaltet sich die Integration unseres Systems, wenn $|\lambda\varphi - \psi|$ nur lineare ET besitzt. Alsdann ist

$$e_1 = e_2 = \cdots = e_n = 1,$$

und man erhält n Gleichungen von der Gestalt

$$\frac{dX_1}{dt} = c_1 X_1, \quad \frac{dX_2}{dt} = c_2 X_2, \ldots \frac{dX_n}{dt} = c_n X_n,$$

und hieraus

$$X_1 = A_1 e^{c_1 t}, \quad X_2 = A_2 e^{c_2 t}, \ldots X_n = A_n e^{c_n t}.$$

Nach dieser Anwendung der ET in der Analysis geben wir eine grössere geometrische Anwendung der ET, bei welcher namentlich die Resultate des § 11 über ähnliche Formen benutzt werden.*

§ 17. Klassifikation der Collineationen in einem Raume beliebig hoher Dimension.

98. Wir betrachten zwei n-dimensionale Räume R und R', in denen wir uns lineare Coordinaten eingeführt denken. Unter

---

* Im Anschluss an obige Entwickelungen von Weierstrass sind zu nennen die Arbeiten von Horn: Ueber ein System lin. partieller Diffgl., Acta math. Bd. 12; Beiträge zur Ausd. der Fuchs'schen Theorie u. s. w., Acta math. Bd. 14; Ueber Systeme lin. Diffgl. mit mehreren Veränderl., Habilitationsschrift der Univ. Freiburg, 1890 (Berlin, Mayer u. Müller); Zur Theorie der Systeme lin. Diffgl. mit einer unabh. Veränderl., Math. Ann. (91) Bd. 39 u. (92) Bd. 40; Zur Integr. der Systeme tot. lin. Diffgl. mit zwei unabh. Veränderl., Math. Ann. (92) Bd. 42; Ueber die Reihenentw. der Integr. eines Systems von Diffgl. u. s. w., Crelle's Journ. (96) Bd. 116 u. (97) Bd. 117 (S. 104 u. S. 254). — Durchweg verwendet die ET. Sauvage: Théorie gén. des systèmes d'équations différ. lin. homog., Paris, Gauthier-Villars, 1895. Eine wichtige Anwendung finden die ET im Gebiete der linearen Diffgl. in der Theorie der Fundamentalgleichung. Vergl. hierzu das Lehrbuch von L. Heffter: Einleitung in die Theorie der lin. Diffgl. mit einer unabh. Variablen, Leipzig 1894, Kapitel XI u. ff. Daselbst findet man die weiteren hierher gehörenden Litteraturangaben, denen wir noch den Hinweis auf Schlesinger, Bemerk. zur Theorie der Fundamentalgl., Crelle's Journ. (95) Bd. 114 hinzufügen. — Endlich heben wir noch eine Anwendung des Theorems XXXVI auf ein physikalisches Problem hervor, die Weierstrass [BM 1858, S. 207 ff. (Ges. W. Bd. I, S. 233 ff.)] gegeben hat.

$$x_1 | x_2 | \dots | x_{n+1}$$

verstehen wir allgemein homogene Coordinaten eines Punktes x von R, unter $u'_1 | u'_2 | \cdots | u'_{n+1}$ homogene Coordinaten einer Ebene u' von R'.* Zwischen den Räumen R und R' wird dann durch eine Gleichung

$$(1) \qquad \sum a_{ik} x_i u'_k = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots n+1)$$

eine collineare Beziehung hergestellt, vermöge welcher dem Punkte x von R der Punkt x' von R' mit den Coordinaten

$$(2) \qquad \varrho x'_k = \sum_i a_{ik} x_i$$

und der Ebene u' von R' die Ebene u von R mit den Coordinaten

$$(3) \qquad \sigma u_i = \sum_k a_{ik} u'_k$$

entspricht, wo ϱ und σ weder Null noch unendlich sind.

Ist die Determinante A der bilinearen Form $\sum a_{ik} x_i u'_k$ nicht Null, und ist in A

$$\text{adj. } a_{ik} = A_{ik},$$

so folgen aus den Gleichungen (2) und (3) bez. Gleichungen

$$(4) \qquad \tau x_i = \sum_k A_{ik} x'_k$$

und

$$(5) \qquad \omega u'_k = \sum_i A_{ik} u_i,$$

wo τ und ω endlich und nicht Null sind; (4) stellt die Umkehrung der Beziehung (2), (5) die der Beziehung (3) vor. Die beiden Beziehungen (4) und (5) werden gleichzeitig durch die bilineare Gleichung

$$\sum A_{ik} x'_k u_i = 0$$

dargestellt. Einem linearen Gebilde (Raume) beliebiger Dimension von Punkten oder Ebenen des einen Raumes entsprechen collineare lineare Gebilde (Räume) gleicher Dimension des anderen. Eine Collineation dieser Art heisst eine nicht ausartende oder eine ordinäre Collineation.

99. Wir müssen uns etwas eingehender mit dem Falle beschäftigen, wo $A = 0$ ist. Sei also $A = 0$ und $n - h + 1$, wo h eine der Zahlen $1, 2, \dots n$, der Rang von A. Alsdann sind die $n+1$ Gleichungen

* Im Falle $n = 1$ bedeuten $u'_1 | u'_2$, wenn z. B. R' eine gerade Punktreihe (Gerade) ist, die Koefficienten eines Punktes (Pasch, Math. Ann. [84] Bd. 23, S. 419), im Falle $n = 2$ bedeuten $u'_1 | u'_2 | u'_3$ die Coordinaten einer Geraden u', wenn z. B. R' ein ebenes System (eine Ebene) vorstellt.

(6) $$\sum_i a_{ik}\, y_i = 0$$

durch $n + 1 - (n - h + 1) = h$ lineare unabhängige Relationen verknüpft. Daher existirt in R ein lineares Gebilde $(h - 1)^{\text{ter}}$ Dimension P_{h-1}* derart, dass *alle Punkte* y von P_{h-1} die Gleichung (6) befriedigen; diese Punkte y heissen singuläre Punkte des Raumes R, P_{h-1} heisst ein singuläres lineares Gebilde (singulärer linearer Raum)** von Punkten in R. Analog werden die Gleichungen

(7) $$\sum_k a_{ik}\, v'_k = 0$$

durch die Ebenen v' eines linearen Gebildes $(h - 1)^{\text{ter}}$ Dimension Π'_{h-1} des Raumes R' befriedigt; diese Ebenen v' heissen singuläre Ebenen von R'; Π'_{h-1} heisst ein singuläres lineares Gebilde (singulärer linearer Raum) von Ebenen in R'.

Seien nun xx' homologe Punkte unserer Collineation; dann bestehen die Gleichungen (2), aus denen durch Composition mit

$$v'_1 \,|\, v'_2 \,|\, \ldots \,|\, v'_n$$

$$\varrho \sum_k x'_k v'_k = \sum a_{ik}\, x_i\, v'_k = \sum_i x_i \sum_k a_{ik}\, v_k$$

folgt. Ist nun v' eine singuläre Ebene von R', so ist wegen (7)

(8) $$\varrho \sum_k x'_k\, v'_k = 0,$$

also ist entweder $\varrho = 0$ oder

(9) $$x'_1 v'_1 + \cdots + x'_{n+1} v'_{n+1} = 0;$$

d. h. es entspricht vermöge der singulären Collineation (2) jedem Punkte von R ein bestimmter Punkt x' von R', der nach (9) auf allen Ebenen des Gebildes*** Π'_{h-1}, mithin auf dem Träger dieses Gebildes liegt, es müsste denn x ein singulärer Punkt des Raumes R sein; dann sind die Gleichungen (2) bei beliebigen x_i wegen (6) durch $\varrho = 0$ erfüllt; mit anderen Worten, x' ist ganz unbestimmt. Umgekehrt: Ist x' in R' gegeben, und wird der Punkt x von R gesucht, welchem x' vermöge (2) entspricht, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Liegt erstens x' nicht auf allen Ebenen des Gebildes Π'_{h-1}, so muss

---

* Im Falle $h = 1$ ein einzelner Punkt.

** Segre, Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Reale Acad. dei Lincei (84), Serie 3 a, Bd. XIX, S. 6. Vergl. diese Arbeit auch im Folgd.

*** Der Zusatz „linear“ bleibt in Folgd. zuweilen weg, da überhaupt hier nur lineare Gebilde auftreten.

wegen (8) $\varrho = 0$ sein; aus den Gleichungen (2) und (6) geht dann unmittelbar hervor, dass jeder singuläre Punkt von R homolog zu x' ist. Liegt aber zweitens x' auf dem Träger des Raumes Π'_{h-1}, dann sind wegen (7) und (9) die Gleichungen (2) durch h linear unabhängige Relationen verbunden, man hat für die Unbekannten

$$x_1, x_2, \ldots x_{n+1}, \varrho$$

also $n+1-h$ Gleichungen, und es giebt daher im Raume R ein lineares Gebilde S_h von der Dimension h, dessen Punkte sämmtlich zu x' homolog sind. Dieses lineare Punktgebilde S_h muss das Gebilde P_{h-1} enthalten, weil jedem Punkte von P_{h-1} alle Punkte von R' entsprechen. Analoges gilt für homologe Ebenen. Eine Collineation der eben betrachteten Art heisst eine singuläre Collineation h^{ter} Species.* Wir stellen ihre Eigenschaften nochmals zusammen:

Es entspricht bez. entsprechen

einem Punkte von R im Allg. . . .	ein Punkt von R', der auf dem Träger des singulären Gebildes Π'_{h-1} liegt;
einem Punkte von R' im Allg. . . .	alle Punkte des singulären Gebildes P_{h-1} in R;
einem Punkte von P_{h-1} in R . . .	alle Punkte von R';
einem Punkte von R', der auf dem . . . Träger von Π'_{h-1} liegt	die Punkte eines linearen Gebildes S_h von R, das P_{h-1} enthält;
einer Ebene von R im Allg. . . .	alle Ebenen von Π'_{h-1};
einer Ebene von R' im Allg. . . .	eine durch P_{h-1} gehende Ebene von R;
einer durch P_{h-1} gehenden Ebene . . von R	die Ebenen eines linearen Gebildes Σ'_h von h^{ter} Dimension in R', welches Π'_{h-1} enthält;
einer Ebene des Gebildes Π'_{h-1} . . . von R'	alle Ebenen von R.

100. Die durch P_{h-1} gehenden Gebilde S_h $(h < n)$ sind die Elemente eines linearen Gebildes $(n-h)^{\text{ter}}$ Dimension, und diese sind durch die betrachtete singuläre Kollineation collinear (projektiv) auf die Punkte des Trägers des Gebildes Π'_{h-1}** bezogen, die ein lineares Punktgebilde $(n-h)^{\text{ter}}$ Dimension constituiren. Analog sind die das Gebilde Π'_{h-1} enthaltenden Gebilde Σ'_h die Elemente eines linearen Gebildes $(n-h)^{\text{ter}}$ Dimension, und diese Elemente sind vermöge

* Segre, l. c. S. 7.

** Bez. bei $h = 1$ auf die Punkte der Ebene Π'_0.

der singulären Collineation collinear (projektiv) bezogen auf die Ebenen, die den Träger von P_{h-1} bilden.* Beide Beziehungen sind nicht singulär, d. h. sie werden durch lineare Gleichungen vermittelt, deren Determinanten nicht Null sind; jede derselben ist die Folge der andern. Z. B. hat man für $n+1=4$, also im gewöhnlichen Raume, bei einer singulären Collineation erster Species *einen* singulären Punkt P_0 in R und *eine* singuläre Ebene Π'_0 in R'. Zwischen dem Bündel P_0 und dem ebenen Systeme Π'_0 wird durch die singuläre Collineation eine collineare (nicht singuläre) Verwandtschaft hergestellt. Jedem Strahle π von P_0 entspricht ein Punkt p von Π'_0 dadurch, dass allen Punkten von π durch (1) ein und derselbe Punkt p auf Π'_0 zugeordnet ist, u. s. w. —

Ist wieder die Determinante A vom Range $n-h+1=r$, so kann man die $(n+1)$ linearen Formen

$$\sum_i a_{ik}\,x_i$$

als lineare Formen von r unabhängigen linearen Formen

$$\alpha_x^{(1)},\ \alpha_x^{(2)},\ \ldots\ \alpha_x^{(r)}$$

darstellen, wo

$$\alpha_x^{(\varkappa)}=\alpha_1^{(\varkappa)}x_1+\alpha_2^{(\varkappa)}x_2+\cdots+\alpha_{n+1}^{(\varkappa)}x_{n+1}.$$

Die Collineation h^{ter} Species (1) lässt sich daher auf die Form

(10) $$\varrho_1\,\alpha_x^{(1)}\,u'_{a^{(1)}}+\varrho_2\,\alpha_x^{(2)}\,u'_{a^{(2)}}+\cdots+\varrho_r\,\alpha_x^{(r)}\,u'_{a^{(r)}}=0$$

bringen, wo die

$$u'_{a^{(\varkappa)}}=u'_1\,a_1^{(\varkappa)}+u'_2\,a_2^{(\varkappa)}+\cdots+u'_{n+1}\,a_{n+1}^{(\varkappa)}$$

lineare Formen der u'_k bedeuten.

Die Punkte, welche die Gleichungen

$$\alpha_x^{(1)}=0,\quad \alpha_x^{(2)}=0,\ \ldots\ \alpha_x^{(r)}=0$$

befriedigen, sind die Punkte des Gebildes P_{h-1}, die Ebenen, welche den Gleichungen

$$u'_{a^{(1)}}=0,\quad u'_{a^{(2)}}=0,\ \ldots\ u'_{a^{(r)}}=0$$

genügen, sind die Ebenen des singulären Gebildes Π'_{h-1}. Diejenigen Punkte, welche die Gleichungen

$$\alpha_x^{(1)}=0,\quad \alpha_x^{(2)}=0,\ \ldots\ \alpha_x^{(r-1)}=0$$

befriedigen, erfüllen ein Gebilde S_h von h^{ter} Dimension; allen diesen Punkten ist durch die collineare Beziehung (10) ein und derselbe

* Bez. bei $h=1$ auf die Ebenen des Punktes P_0.

Punkt $a^{(r)}$ zugeordnet; u. s. w. Man kann also jetzt sofort r durch P_{h-1} gehende Gebilde S_h und die ihnen entsprechenden Punkte $a^{(1)}, a^{(2)} \dots a^{(r)}$ auf dem Träger T von Π'_{h-1} angeben; die Coordinaten dieser r Gebilde $S_h^{(1)}, \dots S_h^{(r)}$ sind unabhängig. Entspricht daher einem $(r+1)^{\text{ten}}$ Gebilde $S_h^{(r+1)}$, das P_{h-1} enthält, und dessen Coordinaten nicht linear abhängig sind von denjenigen von $r-1$ der Gebilde $S_h^{(1)}, \dots S_h^{(r)}$, der Punkt $a^{(r+1)}$ von T, so ist durch die Zuordnung der Elemente $a^{(1)}$ und $S_h^{(1)}$, $a^{(2)}$ und $S_h^{(2)}, \dots a^{(r+1)}$ und $S_h^{(r+1)}$ gerade die collineare, nicht singuläre Beziehung festgelegt, welche durch die singuläre Collineation (1) zwischen den Elementen des Gebildes $(n-h)^{\text{ter}}$ Dimension mit dem Träger P_{h-1} und den Punkten des Trägers von Π'_{h-1} hergestellt wird. Ist umgekehrt für ein bestimmtes n und h $(h < n)$ eine collineare, nicht singuläre Beziehung dadurch gegeben, dass den Elementen $S_h^{(1)}, \dots S_h^{(r+1)}$ eines Gebildes $(n-h)^{\text{ter}}$ Dimension von R der oben beschriebenen Art bez. die Punkte $a^{(1)}, \dots a^{(r+1)}$ eines linearen Punktgebildes $(n-h)^{\text{ter}}$ Dimension von R zugeordnet sind, so giebt es eine singuläre collineare Verwandtschaft h^{ter} Species zwischen R und R', welche diese nicht singuläre Collineation zwischen den beiden Gebilden $(n-h)^{\text{ter}}$ Dimension herstellt. In der That werden dann durch eine bilineare Gleichung von der Gestalt der Gleichung (10) den Elementen $S_h^{(1)}, \dots S_h^{(r)}$ die Punkte $a^{(1)}, \dots a^{(r)}$ bez. zugeordnet bei noch willkürlichen $\varrho_1, \dots \varrho_r$. Verlangt man dann weiter, dass dem Elemente $S_h^{(r+1)}$ der Punkt $a^{(r)}$ entspreche, so bedingt dies $(r-1)$ Gleichungen für die homogenen Veränderlichen $\varrho_1, \dots \varrho_r$; diese sind also bestimmt. Die so erhaltene Collineation (10) ist aber eine singuläre h^{ter} Species.

101. Wir betrachten von nun an eine beliebige Collineation (1) zwischen zwei *aufeinanderliegenden (conjektiven) Räumen* R und R' von n^{ter} Dimension. Um die Punkte x zu bestimmen, die mit ihren homologen zusammenfallen, hat man dann die $(n+1)$ Gleichungen

$$(11) \qquad \lambda x_k = \sum_i a_{ik} x_i$$

zu lösen. Um dies auszuführen, muss man bekanntlich zuerst die charakteristische Gleichung

$$(12) \qquad \Delta(\lambda) \equiv |\lambda - a_{ik}| = 0$$

der Collineation auflösen. Diese hat im Allgemeinen $n+1$ verschiedene Wurzeln $c_1, c_2, \dots c_{n+1}$. Für $\lambda = c_i (i = 1, 2, \dots n+1)$ werden die $n+1$ linearen Gleichungen (11) lösbar; *daher besitzt eine Collineation im n-dimensionalen Raume im Allgemeinen $n+1$ Doppel-*

punkte. Es kann sich nun aber ereignen, dass einer Wurzel mehr als ein Doppelpunkt entspricht. Verschwindet nämlich für $\lambda = c_i$ nicht nur $\Delta(\lambda)$, sondern sind auch gleichzeitig alle Subdeterminanten $(n-h+2)^{\text{ten}}$ Grades von $\Delta(\lambda)$ gleich Null, aber nicht alle Subdeterminanten $(n-h+1)^{\text{ten}}$ Grades, dann sind für $\lambda = c_i$ die Gleichungen (11) durch h unabhängige lineare Gleichungen verknüpft; daher giebt es ∞^{h-1} Doppelpunkte, die ein lineares Gebilde $(h-1)^{\text{ter}}$ Dimension erfüllen. Alle die verschiedenen linearen Gebilde von Doppelpunkten, die auf diese Weise den verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ entsprechen, heissen die Fundamental-Punktgebilde (Fundamentalräume von Punkten) der Collineation.* Analog erhält man durch Auflösen der Gleichungen

(13) $$\lambda u_i = \sum_k a_{ik} u_k$$

die Fundamental-Ebenengebilde (Fundamentalräume von Ebenen) der Collineation.** Im allgemeinen Falle bestehen die ersteren Gebilde aus $n+1$ einzelnen Punkten, die letzteren aus $n+1$ Ebenen; diese $n+1$ Ebenen sind die Ebenen, welche durch je n von den $n+1$ Doppelpunkten bestimmt werden.***

Ist die Collineation eine singuläre h^{ter} Species, so ist P_{h-1} eines der Fundamental-Punktgebilde, Π'_{h-1} eines der Fundamental-Ebenengebilde; beide Gebilde entsprechen der Wurzel $\lambda = 0$ der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$.

102. Nach dem Satze 22 in 81 giebt es eine (nicht ausartende) Reciprocität (Correlation) C, welch die Collineation (1) in sich selbst transformirt. Entspricht vermöge dieser Reciprocität dem Punkte x von R die Ebene $v' = v'_1 | v'_2 | \ldots | v'_{n+1}$ von R', der Ebene u' von R' der Punkt $y = y_1 | y_2 | \ldots | y_{n+1}$ von R, so ist also

(14) $$\sum a_{ik} x_i u'_k = \sum a_{ik} y_i v'_k.$$

Entspricht daher weiter vermöge C dem Punkte x' von R' die Ebene

$$v = v_1 | v_2 | \ldots | v_{n+1}$$

von R, so ist bei $\sum a_{ik} x_i u'_k = 0$ wegen (14) auch $\sum a_{ik} y_i v'_k = 0$,

* Veronese, Ann. d. math. (83) Serie 2a, tom. XI, p. 115.

** Fundamentalgebilde 0ter Dimension (Fundamentalelemente) sind also die einzelnen Doppelpunkte bez. Doppelebenen.

*** Im Falle $n=1$ oder $n=2$, also z. B. für aufeinanderliegende collineare gerade Punktreihen oder ebene Systeme erleiden obige Ausführungen selbstverständliche Modifikationen.

d. h. der Ebene v' von R' entspricht durch die Collineation (1) die Ebene v von R.

Ist x ein Doppelpunkt der Collineation (1), so ist für einen gewissen Werth c_i von λ nach (11)

$$c_i \sum x_i u'_i = \sum a_{ik} x_i u'_k$$

bei beliebigen u'_i; daher ist, da durch die Reciprocität C die Form $x_1 u'_1 + \cdots + x_{n+1} u_{n+1}$ in $y_1 v'_1 + \cdots + y_{n+1} v'_{n+1}$ übergeht,

$$c_i \sum y_i v'_i = \sum a_{ik} y_i v'_k$$

bei beliebigen y_i; v' ist daher eine Doppelebene der Collineation (1), und es gilt somit der Satz:

a) *Die Fundamental-Punktgebilde und Fundamental-Ebenengebilde, die einer und derselben Wurzel der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ entsprechen, sind homologe Gebilde einer Reciprocität.*

Nun seien c_1 und c_2 zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$; $x = x'$ sei ein c_1 entsprechender Doppelpunkt, $u = u'$ eine c_2 entsprechende Doppelebene unserer Collineation; dann ergiebt sich aus (11) und (13) durch Composition mit $u_1 | \ldots | u_{n+1}$ bez. mit $x_1 | \ldots | x_{n+1}$

$$c_1 \sum x_k u_k = \sum a_{ik} x_i u_k,$$

$$c_2 \sum x_i u_i = \sum a_{ik} x_i u_k.$$

Hieraus folgt

$$(c_1 - c_2)(u_1 x_1 + \cdots + u_{n+1} x_{n+1}) = 0.$$

Da aber $c_1 \neq c_2$ ist, so muss folglich

$$u_1 x_1 + \cdots + u_{n+1} x_{n+1} = 0$$

sein. Also:

b) *Jedes Fundamental-Punktgebilde liegt in den Trägern aller nicht zu ihm homologen Fundamental-Ebenengebilde.**

Man spreche auch den dualen Satz aus.

Wir wollen einen weiteren Satz über die Fundamentalgebilde ableiten. Die Verbindungsgerade zweier homologen Punkte x, x'** enthält den Punkt mit der Gleichung

$$\lambda_1 \sum u'_i x_i + \lambda_2 \sum a_{ik} x_i u'_k = 0$$

in Ebenencoordinaten u'_k. Soll derselbe in einer bestimmten Ebene v liegen, so muss

* Segre, l. c. S. 15.

** Das lineare Punktgebilde erster Dimension, das x und x' enthält.

$$\lambda_1 \sum v_i x_i + \lambda_2 \sum a_{ik} x_i v_k = 0$$

sein. Daher schneidet die Gerade xx' die Ebene v im Punkte p mit der Gleichung

$$(15) \qquad \sum u'_i x_i \sum a_{ik} x_i v_k - \sum v_i x_i \sum a_{ik} x_i u'_k = 0.$$

Ist insbesondere v eine zur Wurzel c_i von $\Delta(\lambda) = 0$ gehörige Doppelebene, so ist nach Obigem

$$(16) \qquad c_i \sum v_i x_i = \sum a_{ik} x_i v_k$$

bei allen x_i. Aus (15) und (16) folgt aber

$$(17) \qquad c_i \sum u'_i x_i - \sum a_{ik} x_i u'_k = 0$$

als Gleichung von p. Diese Gleichung ist nicht von v abhängig. Daher gehen alle Ebenen des zu c_i gehörigen Fundamental-Ebenengebildes durch p. Also trifft die Gerade xx' den Träger dieses Gebildes; c_i war aber eine beliebige Wurzel von $\Delta(\lambda) = 0$. Also:

c) Die Verbindungsgeraden homologer Punkte der Collineation treffen die Träger sämmtlicher Fundamental-Ebenengebilde.

Entsprechen den (verschiedenen) Wurzeln c_1 und c_2 Fundamental-Ebenengebilde mit den Trägern T_1 und T_2, so hat man für die gemeinsamen Punkte p_1, p_2 der Geraden xx' und der Träger T_1 und T_2 nach (17) bez. die Gleichungen

$$c_1 \sum u'_i x_i - \sum a_{ik} x_i u'_k = 0, \quad c_2 \sum u'_i x_i - \sum a_{ik} x_i u'_k = 0.$$

Das Doppelverhältniss der vier Punkte $xx'p_1p_2$ ist daher gleich $\frac{c_2}{c_1}$; dasselbe wird 0 bez. ∞, wenn eines der Fundamental-Ebenengebilde zugleich das singuläre Ebenengebilde einer (singulären) Collineation vorstellt.

Man bezeichnet das Verhältniss zweier (verschiedenen) Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ als eine absolute Invariante der Collineation (1), vorausgesetzt, dass die Collineation nicht singulär ist. Ist die Collineation (1) singulär, so sind die Verhältnisse je zweier unter sich und von Null verschiedener Wurzeln von $\Delta(\lambda) = 0$ als absolute Invarianten der Collineation aufzufassen. Besitzt eine Collineation m unabhängige absolute Invarianten, so bezeichnet man irgend welche m unabhängige Invarianten derselben kurz als *die absoluten Invarianten* der Collineation. Im Allgemeinen besitzt eine ordinäre Collineation (1) n, eine singuläre Collineation h^{ter} Species (1) $n - h$ absolute Invarianten.

Die absoluten Invarianten bedeuten nach dem Vorhergehenden Doppelverhältnisse von Punkten. Man kann aber, indem man die dualen Betrachtungen anstellt, die absoluten Invarianten auch als *Doppelverhältnisse von vier Ebenen* deuten. Es ergiebt sich so endlich,

dass die Punktreihen, gebildet aus zwei homologen Punkten x, x' und den Treffpunkten der Geraden xx' mit den Trägern der Fundamental-Ebenenräume projektiv sind unter sich und auch zu den Ebenenbüscheln, gebildet aus zwei homologen Ebenen u, u' und den Ebenen, welche das Ebenenbüschel uu' und die Träger der Fundamental-Punkträume mit einander gemein haben.

Von Wichtigkeit ist schliesslich noch der Satz:

d) Zwei Fundamentalgebilde gleicher Art haben niemals ein Element gemein.

Denn wäre
$$c_1 x_k = \sum_i a_{ik} x_i, \quad c_2 x_k = \sum_i a_{ik} x_i,$$
so wäre
$$(c_1 - c_2) x_k = 0,$$
also, wenn $c_1 \neq c_2$,
$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{k+1} = 0,$$
während nicht alle x_k Null sind.

Liegt der Punkt x auf der Doppelebene v, so liegt nach (16) auch der zu x homologe Punkt x' auf v. *Auf jeder Doppelebene v wird also durch die Collineation (1) eine collineare Beziehung K hergestellt.* Fundamental-Punktgebilde derselben sind alle diejenigen der Collineation (1), welche nicht dem Fundamental-Ebenengebilde entsprechen, welchem v angehört (Satz b). Fundamental-Punktgebilde von K sind aber auch diejenigen Punktgebilde, in welchen unsere Doppelebene v das entsprechende Fundamental-Punktgebilde schneidet*; ausser den Punkten dieser Gebilde sind keine anderen Punkte von v Doppelpunkte der Collineation K. — Analoges gilt, wenn man anstatt einer Doppelebene v *den Schnitt mehrerer Doppelebenen desselben Fundamentalraumes* in Betracht zieht. — Endlich fasse man noch die Collineation in's Auge, welche durch (1) auf dem Träger T** eines Fundamental-Ebenenraumes hergestellt wird. Fundamental-Punkträume derselben sind alle diejenigen von (1), welche nicht dem betrachteten Fundamental-Ebenenraume entsprechen (Satz b), und dann noch das Gebilde der gemeinsamen Punkte von T und dem entsprechenden Fundamental-Punktraume, falls gemeinsame Punkte überhaupt existiren. — Die zu vorstehenden reciproken Betrachtungen wolle man selbst anstellen.

103. In der bilinearen Form $\sum a_{ik} x_i u_k'$, die wir mit $f(xu')$ bezeichnen wollen, sind die Veränderlichen x_i und u_k' als Punkt- bez.

* Vorausgesetzt, dass letzteres Gebilde kein einzelner Punkt ist. Vergl. Satz e auf S. 212.

** Falls T kein Punkt ist; ist T ein Punkt, so ist es ein Doppelpunkt der Collineation.

Ebenencoordinaten contragrediente Variabele. Geht daher die Form $f(xu')$ durch eine Coordinatentransformation im Raume $R = R'$ oder eine projektive (collineare oder reciproke) Umformung des Raumes $R = R'$ in eine Form $F(XU')$ über, so sind $f(xu')$ und $F(XU')$ ähnliche bez. duale Formen (30), und somit stimmen die ET ihrer charakteristischen Determinanten überein; stimmen umgekehrt die ET dieser Determinanten für zwei bilineare Formen überein, so sind dieselben ähnliche bez. duale Formen (Theorem XXI und XXV). Wir bezeichnen die charakteristische Determinante der Form $f(xu')$ zugleich als die charakteristische Determinante der Collineation $f(xu') = 0$, die Charakteristik der Form $f(xu')$ mit contragredienten Veränderlichen (78) zugleich als die Charakteristik* der Collineation $f(xu') = 0$.

Die Collineation (1) habe die Charakteristik

(18) $[(e_1, e_1', \ldots e_1^{(h_1-1)}) \ (e_2, e_2', \ldots e_2^{(h_2-1)}) \ldots (e_l, e_l', \ldots e_l^{(h_l-1)})]$,

wo die e in den runden Klammern nach fallender Grösse geordnet seien; die Exponenten der i^{ten}, rundgeklammerten Gruppe sollen sich auf die Basis $(\lambda - c_i)$ beziehen. Danach steckt der Theiler $(\lambda - c_i)$ in $\Delta(\lambda)$ zur Potenz

$$e_i + e_i' + \cdots + e_i^{(h_i-1)},$$

in allen Subdeterminanten n^{ten} Grades von $\Delta(\lambda)$ zur Potenz

$$e_i' + \cdots + e_i^{(h_i-1)},$$

u. s. w., schliesslich in allen Subdeterminanten $(n - h_i + 2)^{\text{ten}}$ Grades zur Potenz

$$e_i^{(h_i-1)},$$

aber in allen Subdeterminanten $(n - h_i + 1)^{\text{ten}}$ Grades tritt $(\lambda - c_i)$ *nicht* gleichzeitig auf. Daher verschwinden für $\lambda = c_i$ alle Subdeterminanten $(n - h_i + 2)^{\text{ten}}$, aber nicht alle Subdeterminanten $(n - h_i + 1)^{\text{ten}}$ Grades, und somit gehört zur Wurzel c_i von $\Delta(\lambda) = 0$ ein Fundamental-Punktgebilde und Fundamental-Ebenengebilde $(h_i - 1)^{\text{ter}}$ Dimension. *Auf diese Weise ist jeder Exponentengruppe aus (18) ein Fundamental-Punkt und ein Fundamental-Ebenengebilde zugeordnet. Enthält die Gruppe h_i Exponenten, so sind diese Gebilde $(h_i - 1)^{\text{ter}}$ Dimension.*

Ist die Collineation singulär, und beziehen sich die Exponenten der Gruppe

(19) $$(e_i, e_i', \ldots e_i^{(h_i-1)})$$

aus (18) auf die Basis λ, so ist für $\lambda = 0$ die Determinante $\Delta(\lambda)$, wie wir eben sahen, vom Range $(n - h_i + 1)$; die Collineation ist daher singulär h_i^{ter} Species (99); die zur Gruppe (19) gehörenden Fundamental-

* Vergl. Segre, l. c. S. 13.

gebilde sind zugleich die singulären Gebilde der Collineation. In der Charakteristik einer jeden singulären Collineation h_i^{ter} Species tritt umgekehrt stets eine zur Basis λ gehörende Exponentengruppe (19) auf. Ueber diese Exponenten werden wir im Folgenden eine „Null“ setzen; *dass man sowohl ordinäre, als singuläre Collineationen h_i^{ter} Species mit vorgeschriebenen Charakteristiken bilden kann, geht unmittelbar aus Theorem XXII hervor.*

Nunmehr *klassificiren* wir nach einem oft angewandten Principe die ordinären Collineationen des n-dimensionalen Raumes, wie folgt:

Wir rechnen zur selben Klasse alle diejenigen ordinären Collineationen, welche dieselbe Charakteristik haben.

Analog klassificiren wir die singulären Collineationen gleicher Species des n-dimensionalen Raumes:

Wir rechnen zur selben Klasse von singulären Collineationen h_i^{ter} Species diejenigen Collineationen, welche dieselbe Charakteristik besitzen.

Sind die Formen $f(xu')$ und $F(XU')$ ähnlich, so gehören die Collineationen $f(xu') = 0$ und $F(XU') = 0$ zur selben Klasse (siehe diesen Artikel oben). Wir wollen nun umgekehrt voraussetzen, dass zwei Collineationen $f(xu') = 0$ und $F(XU') = 0$ zur selben Klasse gehören. Für $f = 0$ beziehe sich die Gruppe (19) ihrer gemeinsamen Charakteristik (18) auf die Basis $(\lambda - c_i)$, für $F = 0$ auf die Basis $(\lambda - c_i')$. Ist alsdann

$$c_1 : c_2 : \cdots : c_l = c_1' : c_2' : \cdots : c_l',$$

so sind die Collineationen $f = 0$ und $F = 0$ identisch bez. projektiv identisch. Denn ist für ein endliches, von Null verschiedenes ϱ,

$$c_i = \varrho c_i',$$

so besitzen die charakteristischen Determinanten von f und ϱF dieselben ET; daher sind die Formen f und F ähnlich bez. dual (Theorem XXI bez. XXV); die Collineationen $F = 0$ und $\varrho F = 0$ sind aber identisch; also sind in der That unter den gemachten Voraussetzungen die Collineationen $f = 0$ und $F = 0$ identisch bez. projektiv gleich. — Haben zwei Collineationen *dieselbe Charakteristik* (18) und gehört zu einer Gruppe (19) derselben für die eine die Basis $(\lambda - c_i)$, für die andere die Basis $(\lambda - c_i')$, so wollen wir c_i und c_i' *entsprechende Wurzeln* ihrer charakteristischen Gleichungen nennen; man kann dann, wenn c_i und c_i', c_k und c_k' entsprechende von Null verschiedene Wurzeln zweier Collineationen mit gleicher Charakteristik sind, $\frac{c_i}{c_k}$ und $\frac{c_i'}{c_k'}$ *entsprechende absolute Invarianten* der Collineationen nennen (102). Nach dem Vorausgehenden gilt der Satz:

35) Zwei Collineationen sind dann und nur dann identisch bez. projektiv identisch, wenn sie 1) zur selben Klasse gehören, und wenn 2) die entsprechenden absoluten Invarianten derselben übereinstimmen.

Zu jeder Klasse von Collineationen gehört eine *Normalform*, auf welche alle Collineationen derselben durch lineare Coordinatentransformation (bez. durch eine projektive Umformung) gebracht werden können. (Vergl. § 11, insbesondere Gleichung (1) daselbst.)

104. Wir betrachten eine Collineation (1), deren Charakteristik durch (18) gegeben sei*; eine Gruppe (19) aus derselben beziehe sich auf den linearen Theiler $(\lambda - c_i)$ von $\Delta(\lambda)$; der dieser Gruppe (19) zugeordnete Fundamental-Ebenenraum $(h_i - 1)^{\text{ter}}$ Dimension (103) besitzt einen Träger von der Dimension $(n - h_i)$, auf welchem durch die Collineation (1) eine collineare Beziehung hergestellt wird (102), die wir mit K bezeichnen wollen. *Welches ist nun die Charakteristik dieser Collineation K, und welche absolute Invarianten besitzt K?*

Diese Fragen beantwortet man am einfachsten mittelst der Normalform der Collineation (1). Zunächst können wir, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, annehmen, dass die Gruppe (19) die erste in (18) sei; wir schreiben ferner $e^{(\varkappa)}$ für $e_1^{(\varkappa)}$.

Alsdann können wir nach 77 [vergl. daselbst die Gleichung (1)] unsere Collineation (1) durch lineare Coordinatentransformation auf die Gestalt

$$\begin{aligned}
&c_1(x_1u_1 + \cdots + x_e u_e) + (x_1 u_2 + \cdots + x_{e-1} u_e)^{**}\\
&+ c_1(x_{e+1}u_{e+1} + \cdots + x_{e+e'} u_{e+e'}) + (x_{e+1} u_{e+2} + \cdots + x_{e+e'-1} u_{e+e'})\\
&+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
(20)\quad &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&+ c_1(x_{e+e'+\cdots+e^{(h-2)}+1}\, u_{e+e'+\cdots+e^{(h-2)}+1} + \cdots + x_{e+e'+\cdots+e^{(h-1)}}\, u_{e+e'+\cdots+e^{(h-1)}})\\
&+ (x_{e+e'+\cdots+e^{(h-2)}+1}\, u_{e+e'+\cdots+e^{(h-2)}+2} + \cdots + x_{e+e'+\cdots+e^{(h-1)}-1}\, u_{e+e'+\cdots+e^{(h-1)}})\\
&\qquad + \chi(xu) = 0
\end{aligned}$$

bringen, wenn wir für die neuen Coordinaten x_i bez. u_i schreiben. Die in $\chi(xu)$ auftretenden Variabelen fehlen im übrigen Theile von (20).

Aus (20) ersieht man aber sofort, dass die h Ebenen mit den Gleichungen

$$(21)\qquad x_1 = 0,\quad x_{e+1} = 0, \ldots, x_{e+e'+\cdots+e^{(h-2)}+1} = 0$$

Doppelebenen der Collineation sind, und zwar bestimmen sie gerade den der Gruppe

---

* Ist dieselbe singulär, so sind über die Exponenten einer gewissen Gruppe Nullen zu setzen (103).

** Ueber das Auftreten dieser Klammerausdrücke vergl. die Anm. S. 158.

$$(e, e', \ldots e^{(h-1)})$$

zugeordneten Fundamental-Ebenenraum unserer Collineation; die Punkte, deren Coordinaten die Gleichungen (21) befriedigen, erfüllen ein lineares Gebilde $(n-h)^{\text{ter}}$ Dimension, den Träger dieses Fundamental-Ebenengebildes. *Man erhält also die Collineation K im betrachteten Träger, wenn man in (20) die Variabelen $x_1, x_{e+1}, \ldots x_{e+e'+\cdots+e^{(h-2)}+1}$ gleich Null setzt.* Denkt man sich daher die Exponenten $e^{(x)}$ so geordnet, dass $e \geqq e' \geqq e'' \geqq \cdots$, sind ferner in der Reihe dieser Zahlen die k ersten grösser als 1, die übrigen gleich 1, so besitzt (wegen Theorem V; vergl. auch Theorem XXII) die *charakteristische Determinante von K die ET*

$$(\lambda - c_1)^{e-1}, \quad (\lambda - c_1)^{e'-1}, \ldots (\lambda - c_1)^{e^{(k-1)}-1},$$

während ihre *übrigen ET* mit den nicht auf die Basis $(\lambda - c_1)$ bezüglichen ETn der charakteristischen Determinante von (1) *übereinstimmen;* ist aber $e = e' = \cdots = e^{(h-1)} = 1$, so hat die charakteristische Determinante von K *keinen* zur Basis $(\lambda - c_1)$ gehörigen ET, und ihre *übrigen ET stimmen* mit den nicht zur Basis $(\lambda - c_1)$ gehörenden ETn von (1) *überein.* Im ersten Falle hat also K dieselben absoluten Invarianten, wie (1), im letzteren eine absolute Invariante weniger. Also gilt das Theorem:

XL. **Die Collineation K, welche durch eine gegebene Collineation (1) mit der Charakteristik**

(22) $[(e_1, e_1', \ldots e_1^{(h_1-1)})(e_2, e_2', \ldots e_2^{(h_2-1)}) \ldots (e_i, e_i', \ldots e_i^{(h_i-1)}) \ldots (e_l, e_l', \ldots e_l^{(h_l-1)})]$

in dem Träger des der i^{ten} Gruppe dieser Charakteristik zugeordneten Fundamental-Ebenengebildes (oder Fundamental-Punktgebildes) hergestellt wird, hat, wenn

$$e_i \geqq e_i' \geqq \cdots \geqq e_i^{(h_i-1)}$$

vorausgesetzt wird, im Falle $e_i^{(k-1)} > 1$, $e_i^{(k)} = 1$ die Charakteristik

$[(e_1, e_1', \ldots e_1^{(h_1-1)})(e_2, e_2', \ldots e_2^{(h_2-1)}) \ldots (e_i - 1, e_i' - 1, \ldots e_i^{(k-1)} - 1) \ldots (e_l, e_l', \ldots e_l^{(h_l-1)})]$

und dieselben absoluten Invarianten, wie die gegebene Collineation, im Falle $e_i = 1$ aber erhält man die Charakteristik von K, indem man in derjenigen von (1) die i^{te} Gruppe weglässt; die Collineation K besitzt in diesem Falle eine absolute Invariante weniger als die gegebene Collineation.*

* Segre beweist dieses Theorem l. c. Art. 16 u. 17, indem er u. A. zwei Wurzeln c_i sich unendlich nahe rücken lässt. Wir möchten obigen, zugleich einfacheren, Beweis vorziehen. Wird die Charakteristik von K zu [1], so be-

Vergl. die Anmerkung 1, S. 210. — Im eben aufgezählten zweiten Falle sind Fundamental-Punktgebilde von K diejenigen von (1), welche den von der betrachteten Gruppe verschiedenen Gruppen in (22) zugeordnet sind (Satz b), weitere Fundamental-Punktgebilde kann K nicht besitzen; also gilt der Satz:

e) Der einer Gruppe von (22), welche nur Exponenten 1 enthält, zugeordnete Fundamental-Punktraum hat mit dem Träger des entsprechenden Fundamental-Ebenenraumes keinen Punkt gemein.

Eine einfache Folgerung hieraus ist:

f) Bestehen alle Gruppen in der Charakteristik (22) aus Exponenten 1, so liegt kein Punkt eines Fundamentalgebildes auf dem Träger des entsprechenden Fundamental-Ebenengebildes.

Anders verhält sich die Sache, wenn $e_i^{(k-1)} > 1$, $e_i^{(k)} = 1$ ist. Dann hat die Collineation K ebensoviele Fundamental-Punktgebilde, wie (1), und zwar sind erstens solche Gebilde diejenigen von (1), welche den von der betrachteten verschiedenen Gruppen aus (22) entsprechen, zweitens aber dasjenige lineare Gebilde $(k-1)^{\text{ter}}$ Dimension, welches hier der betrachtete Träger mit dem jener i^{ten} Gruppe entsprechenden Fundamental-Punktgebilde gemein haben muss. (Vergl. 102, Schluss.) Also:

g) Enthält eine Gruppe der Charakteristik einer Collineation nur einen Exponenten, der grösser als 1 ist, so schneidet das der Gruppe zugeordnete Fundamental-Punktgebilde den Träger des der Gruppe entsprechenden Fundamental-Ebenengebildes.

---

sagt dieses, dass der Träger des der i^{ten} Gruppe zugeordneten Fundamentalgebildes ein (Doppel-) Punkt bez. eine (Doppel-) Ebene ist. (S. 207, Anm. 2.) — Der Satz, den Casorati (Compt. rend. (81) tom. 92, S. 175 u. 238) bewiesen hat (vergl. auch Heffter, Theorie der lin. Differentialgl., Leipzig 1894, S. 250), ist eine Folgerung aus obigem Satze XL. Ist nämlich speciell in $f = \sum a_{ik} x_i u'_k$ für $s = 1, 2, \ldots n+1$, $t = 1, 2, \ldots h$

$$a_{st} = c, \quad \text{bei } s = t,$$
$$a_{st} = 0, \quad \text{bei } s \neq t,$$

so sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots x_h = 0$ die linear unabhängigen Gleichungen von h Ebenen des Fundamental-Ebenenraumes Π'_{h-1}, der der ersten Exponentengruppe in (22) zugeordnet ist, wenn $h = h_1$, $c = c_1$ genommen wird. Die Collineation K im Träger von Π'_{h-1} hat daher die Gleichung

$$\sum a_{ik} x_i u'_k = 0 \quad (i, k = h+1, h+2, \ldots n+1);$$

die charakteristische Determinante derselben besitzt aber nach Satz XL die ET

$$(\lambda - c)^{e_1 - 1}, (\lambda - c)^{e'_1 - 1}, \ldots (\lambda - c)^{e_1^{(h-1)} - 1}$$

mit der Basis $\lambda - c$, wobei die Potenzen mit Exponenten „Null“ wegbleiben, und im Uebrigen dieselben ET, wie $f = 0$. *Das besagt aber gerade der Casorati'sche Satz.* — Dass aus diesem umgekehrt der obige Satz XL gefolgert werden kann, braucht wohl kaum erwähnt zu werden.

Wir wollen weiter den Fall studiren, wo in einer, etwa wieder der i^{ten} Gruppe von (22), *alle Exponenten grösser als 1 sind.* Da dann $k = h_i$, so enthält der betrachtete Träger ausser den nicht entsprechenden Fundamental-Punktgebilden von (1) nach dem Vorhergehenden einen Fundamental-Punktraum $(h_i - 1)^{ter}$ Dimension. Daher enthält der Träger auch das der i^{ten} Gruppe entsprechende Fundamental-Punktgebilde von (1) (103):

h) Tritt in der Charakteristik einer Collineation (1) eine Gruppe von Exponenten auf, die sämmtlich grösser als 1 sind, so enthält der Träger des ihr zugeordneten Fundamental-Ebenengebildes alle Fundamental-Punktgebilde von (1).

Zum Schlusse noch eine Bemerkung über die Fundamentalgebilde einer singulären Collineation (1). Ist (1) singulär, so giebt es, wenn wir wieder die Collineation (1) kurz mit $f(xu') = 0$ bezeichnen und

$$\sum_i x_i u'_i = u'_x \quad (i = 1, 2, \ldots n + 1)$$

setzen, in der Schaar von Collineationen

$$\lambda_1 u'_x + \lambda_2 f(xu') = 0$$

im Allgemeinen $(n + 1)$ singuläre Collineationen und unendlich viele ordinäre Collineationen, da $|\lambda_1 u'_x + \lambda_2 f(xu')| \mathrel{\equiv\!\!|\!\!\equiv} 0$ ist; sei diese Determinante für $\lambda_1 = -\lambda'$, $\lambda_2 = 1$ nicht Null, also

$$f(xu') - \lambda' u'_x = 0$$

eine ordinäre Collineation der Schaar, die wir kurz mit $\chi(xu') = 0$ bezeichnen wollen; jeder Doppelpunkt von $f(xu') = 0$ ist auch ein solcher von $\chi(xu') = 0$, und umgekehrt. Dasselbe gilt von den Doppelebenen. Also haben $f(xu') = 0$ und $\chi(xu') = 0$ dieselben Fundamentalgebilde. Die charakteristische Determinante von $\chi(xu')$ ist

$$|(\lambda + \lambda')u'_x - f(xu')|;$$

ist daher $(\lambda - c)^e$ ein ET von $|\lambda u'_x - f(xu')|$, so ist $[\lambda - (c - \lambda')]^e$ ein ET von $|\lambda u'_x - \chi(xu')|$. Also:

Ist $f(xu') = 0$ eine singuläre Collineation, so hat die ordinäre Collineation $\lambda' u'_x - f(xu') = 0$ dieselben Fundamentalgebilde, wie $f(xu') = 0$; ihre Charakteristik erhält man aus derjenigen von $f(xu') = 0$, indem man die übergesetzten Nullen weglässt.

105. Die bisher erlangten Resultate setzen uns in den Stand, *die projektiven Eigenschaften der Collineationen aller Klassen eines Raumes n^{ter} Dimension vollständig anzugeben,* ohne dass es nöthig ist, die betreffenden Normalformen der Collineationen heranzuziehen. Wir wollen dies für die Fälle $n = 1, 2$ und 3 wirklich ausführen und zwar bei $n = 1$ in der Geraden, bei $n = 2$ in der Ebene. Wenn wir dabei die Normalformen für die Collineationen aller Klassen zufügen, so geschieht dieses nur deshalb, damit der Anfänger die geometrischen Eigenschaften der

Collineationen an den Normalformen direkt studiren kann. Versteht derselbe unter p_i (π_i) den Punkt (die Ebene), dessen (deren) Coordinaten alle ausser der i^{ten} Null sind, so stimmen die unten angegebenen Fundamentalräume mit denen der Collineation in der betreffenden Normalform überein.*

Ueber den Fall $n = 1$ sind einige Vorbemerkungen zweckmässig. Hat ein Punkt die Koefficienten $u_1' \mid u_2'$, so sind $-u_2' \mid u_1'$ seine Coordinaten $x_1' \mid x_2'$; die Gleichung $u_1' x_1 + u_2' x_2 = 0$ besagt also, dass

$$x_1 x_2' - x_2 x_1' = 0, \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1'}{x_2'}$$

ist, dass also die Punkte $x_1 \mid x_2$ und $u_1' \mid u_2'$ identisch sind. Dieses vorausgeschickt, betrachten wir die Collineationen der Klasse [11]. Hier giebt es den zwei Exponenten 1 in [11] entsprechend in jeder der aufeinanderliegenden projektiven Punktreihen R und R' zwei Doppelpunkte p_1 und p_2, π_1 und π_2, wo p_1, π_1 und p_2, π_2 entsprechende Doppelpunkte seien. Nach Satz b fällt aber (vergl. die vorausgehende Bemerkung) p_1 mit π_2, p_2 mit π_1 zusammen. Die absolute Invariante ist das Doppelverhältniss, das zwei homologe Punkte mit den beiden Doppelpunkten $p_1 = \pi_2$ und $p_2 = \pi_1$ bestimmen (S. 206). — Untersuchen wir z. B. weiter die Collineationen der Klasse [2]; hier tritt in R und R' je ein Doppelpunkt p_2 bez. π_1 auf; nach Satz h ist aber $p_2 = \pi_1$; absolute Invariante ist keine vorhanden. Endlich wollen wir die singuläre Collineation $[1, \mathring{1}]$ betrachten. Sie hat zwei Doppelpunkte $p_1 = \pi_2$, $p_2 = \pi_1$, wie [11]. (Vergl. 104, Schluss.) Von diesen ist der eine p_2 der singuläre Punkt in R, der andere p_1 der in R' (101, Schluss). Dem Punkte p_2 von R entsprechen alle Punkte von R', jedem von p_2 verschiedenen Punkte von R entspricht derselbe Punkt p_1 in R' (siehe das Schema am Schlusse von 99), u. s. w. Nun wird man auch die übrigen Fälle, ebenso die verschiedenen Fälle bei $n = 2$ und $n = 3$ erledigen können, zumal im Folgenden auf die in Betracht kommenden obigen Sätze (durch eingeklammerte a, b u. s. w.), wenn nöthig, hingewiesen wird.

Wir haben also folgende

I. Klassen der Collineationen in der Geraden.

α) Ordinäre Collineationen.

1. [11]: $c_1 x_1 u_1 + c_2 x_2 u_2 = 0.$

Hier treten *zwei Doppelpunkte* $p_1 = \pi_2$ und $p_2 = \pi_1$ auf; sind $x x'$ zwei homologe Punkte einer Collineation dieser Klasse, so ist das Doppelverhältniss der Punkte $x x' p_1 p_2$ *die absolute Invariante* derselben.

* In der Geraden hat man dann also unter π_1, π_2 den Punkt der Koefficienten $1 \mid 0$ bez. $0 \mid 1$ zu verstehen, u. s. w.

2. [2]: $c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2) + x_1 u_2 = 0.$

Die Collineationen dieser Klasse besitzen *einen* Doppelpunkt $p_2 = \pi_1$ und *keine absolute Invariante.*

3. [(11)]: $x_1 u_1 + x_2 u_2 = 0.$

Jeder Punkt der aufeinanderliegenden Punktreihen ist ein Doppelpunkt; *keine absolute Invariante! Die identische Collineation.*

β) Singuläre Collineationen erster Species.

1. [$1\overset{\circ}{1}$]: $x_1 u_1 = 0.$

Jede der projektiven Punktreihen hat einen singulären Punkt p_2 bez. p_1; diese Punkte sind zugleich Doppelpunkte der Collineation; *keine absolute Invariante.*

2. [$\overset{\circ}{2}$]: $x_1 u_2 = 0.$

Wie 1, nur dass die beiden singulären Punkte in einen Punkt p_2 *zusammenfallen; p_2* ist zugleich Doppelpunkt.

II. Klassen der Collineationen in der Ebene.

α) Ordinäre Collineationen.

1. [111]: $c_1 x_1 u_1 + c_2 x_2 u_2 + c_3 x_3 u_3 = 0.$

Drei Doppelpunkte und *drei Doppelgerade,* welche die Ecken und Seiten eines Dreiecks bilden, und zwar ist, wenn p_i und π_i $(i = 1, 2, 3)$ entsprechende Fundamentalelemente sind, die Gerade $p_1 p_2 = \pi_3$, $p_2 p_3 = \pi_1$, $p_3 p_1 = \pi_2$ (*f*). Die Collineationen in jeder der drei Doppelgeraden haben dieselbe Charakteristik [11] (XL). Die Punktreihen, welche aus zwei homologen Punkten x, x' und den Schnittpunkten ihrer Verbindungslinie mit den drei Doppelgeraden bestehen, sind projektiv unter sich und zu Strahlenbüscheln, gebildet aus zwei homologen Geraden u, u' und den Verbindungsgeraden ihres Schnittpunktes mit den drei Doppelpunkten (S. 206—207). Zwei unabängige Doppelverhältnisse, welche x, x' mit diesen Schnittpunkten (u, u' mit diesen Verbindungsgeraden) bestimmen, sind die *beiden absoluten Invarianten.*

2. [21]: $c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2) + c_2 x_3 u_3 + x_1 u_2 = 0.$

Zwei Doppelpunkte p_2 und p_3, *zwei Doppelgerade* π_1 und π_3. Auf der dem Exponenten 2 in [21] entsprechenden Doppelgeraden π_1 liegen die beiden Doppelpunkte p_2 und p_3 (*h*), die zu 1 in [21] gehörende Doppelgerade π_3 enthält den dem Exponenten 2 zugeordneten Doppelpunkt p_2 (*b*), aber nicht p_3 (*e*). Die Collineationen in π_1 und π_3 gehören bez. zu den Klassen [11] und [2] (XL). *Die absolute Invariante* ist das Doppelverhältniss, welches homologe Punkte x, x' mit den Schnittpunkten der Geraden xx' und π_1, π_3 bestimmen, u. s. w.

3. $[3]$: $c_1(x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3) + x_1u_2 + x_2u_3 = 0$.

Ein Doppelpunkt p_3 und *eine Doppelgerade* π_3, die p_3 enthält (*h*); *keine absolute Invariante.*

4. $[(11)1]$: $c_1(x_1u_1 + x_2u_2) + c_3x_3u_3 = 0$.

Dem Exponenten 1 entspricht ein Doppelpunkt p_3 und eine Doppelgerade π_3, die getrennt liegen (*e*), der Gruppe (11) entspricht ein lineares Fundamental-Punktgebilde (Strahlengebilde) erster Dimension, d. h. eine gerade Reihe von Doppelpunkten mit dem Träger π_3 (*a*) und Büschel von Doppelstrahlen mit dem Mittelpunkte p_3(*a*). Die Verbindungsgeraden homologer Punkte gehen stets durch p_3, die Schnittpunkte homologer Geraden liegen stets auf π_3(*c*). Die Collineationen dieser Klasse stellen *perspektive Beziehungen* vor, bei denen Axe π_3 und Centrum p_3 der Perspektivität *getrennt* liegen. *Die absolute Invariante* ist das Doppelverhältniss, welches homologe Punkte x, x', das Centrum p_3 und der Schnittpunkt der Geraden xx' mit der Axe π_3 bestimmen.

5. $[(21)]$: $c_1(x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3) + x_1u_2 = 0$.

Die Collineationen sind *perspektiv*, und zwar liegen Axe π_1 und Centrum p_2 der Perspektivität *aneinander (g); keine absolute Invariante.*

6. $[(111)]$: $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$.

Die *identische Collineation; keine absolute Invariante.*

β) Singuläre Collineationen.

a) Singuläre Collineationen erster Species.

Die Klassen der singulären Collineationen erster Species sind die *Klassen der projektiven Beziehungen zwischen einem Strahlenbüschel und einer geraden Punktreihe, die derselben Ebene angehören* (100). Was die Art der Vertheilung der Fundamental- bez. der singulären Gebilde anbelangt, so kann dieselbe unmittelbar aus II, α ersehen werden. (Vergl. 104, Schluss.) Wir haben folgende Fälle zu unterscheiden:

1. $[11\overset{\circ}{1}]$: $c_1x_1u_1 + c_2x_2u_2 = 0$.

Der Mittelpunkt p_3 des Strahlenbüschels und der Träger der zu ihm projektiven Punktreihe auf π_3 liegen *getrennt. Zwei* Punkte p_1 und p_2 von π_3 liegen auf den homologen Strahlen π_2 bez. π_1 von p_3. — Die Collineation auf der singulären (Doppel-) Geraden π_3 gehört zur Klasse [11], die Collineationen auf den beiden anderen Doppelgeraden π_1 und π_2 gehören zur Klasse $[1\overset{\circ}{1}]$ (XL). *Die absolute Invariante* ist das Doppelverhältniss, welches zwei homologe Punkte der Collineation und die Schnittpunkte ihrer Verbindungsgeraden mit π_1 und π_2 bestimmen.

2. $[2\overset{\circ}{1}]$: $c_1(x_1u_1 + x_2u_2) + x_1u_2 = 0$.

Der Mittelpunkt p_3 des Büschels und der Träger π_3 der Punktreihe liegen *getrennt; ein* Strahl π_1 des Büschels p_3 geht durch den homologen Punkt p_2 von π_3. *Keine absolute Invariante.*

3. $[(11)\overset{\circ}{1}]$: $x_1u_1 + x_2u_2 = 0$.

Die Punktreihe auf π_3 und das zu ihm projektive Strahlenbüschel p_3 befinden sich in *perspektiver Lage. Keine absolute Invariante.*

4. $[\overset{\circ}{2}1]$: $c_2x_3u_4 + x_1u_2 = 0$.

Der Mittelpunkt p_2 des Strahlenbüschels liegt *auf dem Träger* π_1 der Punktreihe, und zwar entspricht dem Strahle π_1 von p_2 ein von p_2 *verschiedener* Punkt p_3 von π_1.* *Keine absolute Invariante.*

5. $[\overset{\circ}{3}]$: $x_1u_2 + x_2u_3 = 0$.

Der Träger π_1 der Punktreihe *enthält* den Mittelpunkt p_3 des zu ihm projektiven Büschels, und zwar *entspricht dem Strahle* π_1 *von* p_3 *der Punkt* p_3 *von* π_1.* *Keine absolute Invariante.*

b) Singuläre Collineationen zweiter Species.

1. $[1\overset{\circ\circ}{11}]$: $x_1u_1 = 0$.

Die Ebene R enthält eine gerade Reihe singulärer Punkte auf dem Träger π_1, die Ebene R' ein Büschel singulärer Strahlen mit dem Scheitel p_1; p_1 *liegt nicht auf* π_1 (vergl. II, α) unter 4 und 104, am Schlusse). Einem Punkte von R entspricht im Allgemeinen der Punkt p_1 von R', der zugleich ein Doppelpunkt ist; weitere Doppelpunkte sind die Punkte von π_1, denen als Punkte von R jeder Punkt von R' entspricht. U. s. w. (99).

2. $[\overset{\circ\circ}{21}]$: $x_1u_2 = 0$.

Wie 1, nur dass hier der Mittelpunkt p_2 des Büschels singulärer Strahlen *auf dem Träger* π_1 der singulären Punkte liegt. — In beiden Fällen treten *keine absoluten Invarianten* auf. (Vergl. II, α) unter 5.)

III. Klassen der Collineationen im Raume 3[ter] Dimension.

α) Ordinäre Collineationen.

1. $[1111]$: $c_1x_1u_1 + c_2x_2u_2 + c_3x_3u_3 + c_4x_4u_4 = 0$.

Vier Doppelpunkte p_1, p_2, p_3, p_4 und *vier Doppelebenen* $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$, welche die Ecken und Seitenflächen eines Tetraeders bilden. Sind p_i und π_i entsprechende Doppelelemente, so ist die Ebene $p_1p_2p_3 = \pi_4$, $p_2p_3p_4 = \pi_1$, u. s. w. (*f*).** — Die Collineationen auf den vier Doppel-

---

* Ueber die Charakterisirung dieses Falles durch das Verschwinden gewisser rationaler Invarianten der Collineation vergl. Muth, Math. Ann. (92) Bd. 42, S. 260.

** Die Lage der Doppelgeraden erschliesst man aus derjenigen der Doppelpunkte- und Ebenen mit Leichtigkeit.

ebenen haben dieselbe Charakteristik [111] (XL). — Die Punktreihen, welche aus zwei homologen Punkten x, x' und den Schnittpunkten der Geraden xx' mit den vier Doppelebenen bestehen, sind unter sich projektiv und projektiv zu den Ebenenbüscheln, gebildet aus zwei homologen Ebenen uu' und den Ebenen, welche die Gerade uu' mit den vier Doppelpunkten verbinden (S. 206–207). Drei unabhängige Doppelverhältnisse, welche x, x' mit diesen Schnittpunkten (u, u' mit diesen Verbindungsebenen) bestimmen, sind je *drei absoluten Invarianten* der Collineationen dieser Klasse.

2. [211]: $c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2) + c_2 x_3 u_3 + c_3 x_4 u_4 + x_1 u_2 = 0.$

Drei Doppelpunkte p_2, p_3, p_4 und *drei Doppelebenen* π_1, π_3, π_4. Die drei Doppelpunkte liegen in der dem Exponenten 2 zugeordneten Doppelebene π_1 (h) und die drei Doppelebenen schneiden sich in dem dem Exponenten 2 zugeordnetem Doppelpunkte p_2. Die den beiden Exponenten 1 entsprechenden Doppelebenen π_3 und π_4 enthalten je zwei Doppelpunkte p_2 und p_4 bez. p_2 und p_3 (b). — Die Collineation auf π_1 hat die Charakteristik [111], ihre absoluten Invarianten sind dieselben, wie die der betreffenden räumlichen Collineation. Die Collineationen auf π_3 und π_4 gehören zur Klasse [21], u. s. w. (XL). — Die Deutung der *absoluten Invarianten*, deren die Collineationen dieser Klasse je *zwei* besitzen, geschieht analog wie bei 1.

3. [31]: $c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3) + c_2 x_4 u_4 + x_1 u_2 + x_2 u_3 = 0.$

Zwei Doppelpunkte p_3, p_4 und zwei *Doppelebenen* π_1, π_4. Die dem Exponenten 3 zugeordnete Doppelebene π_1 enthält die beiden Doppelpunkte; der demselben Exponenten entsprechende Doppelpunkt p_3 liegt in der Schnittgeraden der beiden Doppelebenen (h); p_4 liegt aber nicht in dieser Schnittlinie (e). — Die Collineationen auf π_1 und π_4 haben bez. die Charakteristiken [21] und [3] (XL). — *Eine absolute Invariante:* das Doppelverhältniss, welches zwei homologe Punkte x, x' und die Schnittpunkte der Geraden xx' mit π_1 und π_4 bestimmen.

4. [22]: $c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2) + c_2(x_3 u_3 + x_4 u_4) + x_1 u_2 + x_3 u_4 = 0.$

Zwei Doppelpunkte p_2 und p_4, *zwei Doppelebenen* π_1 und π_3; die beiden Doppelpunkte liegen in der Schnittgeraden der beiden Doppelebenen (h); *eine absolute Invariante*, die wie bei 3. zu deuten ist. — Die Collineationen in den Ebenen π_1 und π_3 gehören beide zur Klasse [21].

5. [4]: $c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4) + x_1 u_2 + x_2 u_3 + x_3 u_4 = 0.$

Ein Doppelpunkt p_4 und *eine Doppelebene* π_1, die incident sind (h). — Die Collineation auf π_1 hat die Charakteristik [3] (XL). — *Keine absolute Invariante.*

6. [(11)11]: $c_1(x_1u_1 + x_2u_2) + c_3x_3u_3 + c_4x_4u_4 = 0$.

Der Gruppe (11) ist ein lineares Fundamental-Punktgebilde 1ter Dimension *(eine gerade Reihe von Doppelpunkten)* auf p_1, p_2 und ein ebensolches Ebenengebilde *(Büschel von Doppelebenen)* mit dem Träger $p_3\,p_4 = \pi_1\,\pi_2$ zugeordnet. *Die Axe des Büschels schneidet den Träger der Punktreihe nicht (f).* Weiter sind *zwei* Doppelpunkte (Doppelebenen) vorhanden, die im Träger des Büschels liegen (*b*): $p_3, p_4\,(\pi_3, \pi_4)$. Die Verbindungsgeraden homologer Punkte schneiden stets die Gerade $p_3\,p_4$; die Schnittgeraden homologer Ebenen schneiden stets die Gerade $p_1\,p_2$ (*c*). Die Collineationen auf π_3 und π_4 gehören beide zur Klasse [(11)1]; sie sind also beide perspektivisch mit den Centren p_4 bez. p_3 und der Axe $p_1\,p_2$. (Vergl. II, α unter 4.) — *Zwei absolute Invarianten:* Zwei unabhängige von den Doppelverhältnissen, welches zwei homologe Punkte x, x' mit den Schnittpunkten der Geraden $x x'$ mit den Ebenen π_3, π_4 und der Geraden $p_3\,p_4$ bestimmen, u. s. w.

7. [2(11)]: $c_1(x_1u_1 + x_2u_2) + c_2(x_3u_3 + x_4u_4) + x_1u_2 = 0$.

Wir haben den vorigen Fall, nur dass hier die Axe p_1p_2 des *Büschels von Doppelebenen* nur *einen* Doppelpunkt p_2 enthält, und durch den Träger $p_3\,p_4 = \pi_1\,\pi_2$ der *Reihe von Doppelpunkten* nur *eine* Doppelebene π_1 geht. — *Eine absolute Invariante*, die man analog deutet, wie bei 6. —

8. [(21)1]: $c_1(x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3) + c_3x_4u_4 + x_1u_2 = 0$.

Wie 6, nur dass *der Träger* $p_2\,p_3$ *der aus lauter Doppelpunkten bestehenden Punktreihe die Axe* $p_2p_4 = \pi_1\,\pi_3$ *des Büschels der Doppelebenen schneidet (g).* Ausser dem Schnittpunkte p_2 dieser Träger liegt noch ein weiterer, dem Exponenten 1 zugeordneter Doppelpunkt p_4 auf der Geraden $p_2\,p_4$; ausser $p_2p_3p_4$ giebt es noch eine *weitere* durch p_2p_3 gehende *Doppelebene* $p_1\,p_2p_3 = \pi_4$. — *Eine absolute Invariante;* über ihre Deutung vergl. 6.

9. [(31)]: $c_1(x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4) + x_1u_2 + x_2u_3 = 0$.

Es giebt wieder *eine Gerade* p_3p_4, *deren sämmtliche Punkte Doppelpunkte,* und *eine Gerade* p_2p_3, *deren sämmtliche Ebenen Doppelebenen* sind, diese Geraden *schneiden sich (g).* Weitere Doppelelemente sind *nicht* vorhanden. *Keine absolute Invariante.*

10. [(22)]: $c_1(x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4) + x_1u_2 + x_3u_4 = 0$.

Eine Reihe von Doppelpunkten und *ein Büschel von Doppelebenen,* deren Träger $p_2\,p_4 = \pi_1\,\pi_3$ *zusammenfallen* (*h*). Die Verbindungsgeraden homologer Punkte und die Schnittgeraden homologer Ebenen treffen stets diesen Träger (*c*). *Keine absolute Invariante.*

11. $[(11)(11)]$: $c_1(x_1u_1 + x_2u_2) + c_3(x_3u_3 + x_4u_4) = 0$.

Hier treten *zwei gerade Reihen von Doppelpunkten* auf mit den Trägern p_1p_2 und p_3p_4 und *zwei Büschel von Doppelebenen*, deren Axen bez. mit p_1p_2 und p_3p_4 zusammenfallen (*b*). Die Geraden p_1p_2 und p_3p_4 *schneiden sich nicht* (*f*). Die Verbindungsgeraden homologer Punkte x, x' und die Schnittgeraden homologer Ebenen u, u' treffen beide Axen p_1p_2 und p_3p_4 (*c*). Bezeichnen wir diese Schnittpunkte mit s_1 und s_2, so sind die Punktreihen $xx's_1s_2$ unter sich projektiv und projektiv zu den Büscheln, die durch u, u' und die Ebenen, welche durch die Geraden uu' und p_1p_2 bez. p_3p_4 gehen, gegeben sind. *Eine absolute Invariante:* Das Doppelverhältniss vier solcher Punkte oder vier solcher Ebenen. (Ist dieselbe gleich -1, so ist die betreffende Collineation eine *geschaart involutorische.*)

12. $[(111)1]$: $c_1(x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3) + c_4x_4u_4 = 0$.

Alle Punkte einer gewissen Ebene $p_1p_2p_3 = \pi_4$ sind Doppelpunkte, und *alle* durch einen gewissen Punkt $\pi_1\pi_2\pi_3 = p_4$ gehenden *Ebenen* sind Doppelebenen; p_4 und π_4 *liegen getrennt* (*e*). *Weitere Doppelelemente* sind p_4 und π_4. Die Verbindungslinien homologer Punkte gehen sämmtlich durch p_4, die Schnittlinien homologer Ebenen liegen sämmtlich auf π_4 (*c*). Die Collineationen dieser Klasse sind *perspektive räumliche Beziehungen* mit dem resp. Centrum p_4 und der Ebene π_4 der Collineation. — *Eine absolute Invariante:* Das Doppelverhältniss, welches zwei homologe Punkte x, x' mit p_4 und dem Schnittpunkte der Geraden xx' mit π_4 bestimmen, u. s. w.

13. $[(211)]$: $c_1(x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4) + x_1u_2 = 0$.

Die Collineationen dieser Klasse sind gleichfalls *perspektive räumliche Beziehungen*, bei denen aber stets das Centrum p_2 *in der Ebene* π_1 der Collineation liegt (*g*). *Keine absolute Invariante.*

14. $[(1111)]$: $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 = 0$.

Die *identische* Collineation; *keine absolute Invariante.*

β) Singuläre Collineationen.

a) Singuläre Collineationen erster Species.

Die Klassen der singulären Collineationen erster Species sind die *Klassen der collinearen Beziehungen zwischen einem Bündel und einem ebenen Systeme desselben räumlichen Systems* (100). Die Vertheilung der Fundamentalgebilde bez. der singulären Gebilde kann man aus III, α) ersehen (104, Schluss). Hier können folgende Fälle eintreten:

1. $[111\overset{\circ}{1}]$: $c_1x_1u_1 + c_2x_2u_2 + c_3x_3u_3 = 0$.

Das Centrum p_4 des Bündels liegt *nicht* im Träger π_4 des ebenen Systems. *Drei* Punkte $p_1\,p_2\,p_3$ von π_4 liegen in den homologen

Strahlen des Bündels. — Die Collineation in der Ebene π_4 hat die Charakteristik [111]; diejenigen in den übrigen Doppelebenen sind singulär erster Species, und zwar ist ihre Charakteristik $[11\mathring{1}]$ (XL). — *Zwei absolute Invarianten:* zwei unabhängige von den Doppelverhältnissen, welche zwei homologe Punkte und die Schnittpunkte ihrer Verbindungsgeraden mit den drei Ebenen $p_4p_1p_2$, $p_4p_2p_3$, $p_4p_3p_1$ bestimmen; u. s. w.

2. $[21\mathring{1}]$: $c_1(x_1u_1 + x_2u_2) + c_2x_3u_3 + x_1u_2 = 0.$

Wie 1, nur das *zwei* Strahlen des Bündels p_4 durch die homologen Punkte der Ebene π_4 gehen. — Die Collineation in der Ebene π_4 gehört zur Klasse [21], diejenigen in den beiden anderen Doppelebenen gehören zu den Klassen $[11\mathring{1}]$ und $[2\mathring{1}]$ (XL). — *Eine absolute Invariante,* die man analog, wie bei 1 deutet.

3. $[3\mathring{1}]$: $c_1(x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3) + x_1u_2 + x_2u_3 = 0.$

Wie 1, nur dass hier *ein* Punkt der Ebene π_4 im homologen Strahle des Bündels p_4 liegt. — Die Collineation in π_4 hat die Charakteristik [3]; die Collineation auf der anderen Doppelebene π_1 hat die Charakteristik $[2\mathring{1}]$ (XL).

4. $[(11)1\mathring{1}]$: $c_1(x_1u_1 + x_2u_2) + c_3x_3u_3 = 0.$

Wie 1, aber die Collineation in der singulären Ebene π_4 gehört zur Klasse [(11)1], ist also perspektiv derart, dass *das Centrum p_3 und die Axe p_1p_2 getrennt liegen. Ausser p_3* liegen hier also *sämmtliche Punkte* von p_1p_2 in ihren homologen Strahlen. Bedeutet p_4 den singulären Punkt, so treffen alle Gerade, welche homologe Punkte verbinden, die Gerade p_3p_4. *Eine absolute Invariante:* Das Doppelverhältniss, welches zwei homologe Punkte x, x' und die Schnittpunkte der Geraden xx' mit der Geraden p_3p_4 und der Ebene $p_1p_2p_4$ bestimmen.

5. $[(21)\mathring{1}]$: $c_1(x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3) + x_1u_2 = 0.$

Wie 4, nur dass hier in der singulären Ebene π_4 *das Centrum p_2 auf der Axe p_2p_3 der Perspektivität liegt. Keine absolute Invariante.*

6. $[(111)\mathring{1}]$; $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0.$

Das Bündel mit dem Träger p_4 und das zu ihm collineare ebene System mit dem Träger π_4 befinden sich in *perspektiver Lage.* — Jeder nicht in π_4 liegende Punkt wird aus p_4 auf die Ebene π_4 nach dem zu ihm homologen Punkte projicirt.* — *Keine absolute Invariante.*

* Die Perspektive des Malers ist also eine singuläre collineare Beziehung erster Species mit der Charakteristik $[(111)\mathring{1}]$. Die Reliefperspektive dagegen und die gewöhnliche Perspektive des Bildhauers gehören zur Klasse [(111)1] der ordinären räumlichen Collineationen.

7. $[\overset{\circ}{2}11]$: $c_2 x_3 u_3 + c_3 x_4 u_4 + x_1 u_2 = 0$.

Der Mittelpunkt p_2 des Bündels liegt *im* Träger π_1 des zu ihm collinearen ebenen Systems. Dem in π_1 liegenden Strahlenbüschel von p_2 entspricht eine Punktreihe, deren Träger $p_3 p_4$ *nicht* durch den Mittelpunkt des Büschels geht. *Zwei Strahlen* desselben gehen durch die homologen Punkte p_3, p_4 der Punktreihe. *Eine absolute Invariante;* ihre Deutung erfolgt analog, wie bei 1.

8. $[2\overset{\circ}{2}]$: $c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2) + x_1 u_3 + x_3 u_4 = 0$.

Wie 7, aber nur *ein* Strahl des dem ebenen Systeme π_3 angehörigen Strahlenbüschels p_4 geht durch den homologen Punkt p_2 der zu ihm projektiven Punktreihe $p_1 p_2$. — *Keine absolute Invariante.*

9. $[\overset{\circ}{2}(11)]$: $c_2(x_3 u_3 + x_4 u_4) + x_1 u_2 = 0$.

Wie 7, aber *sämmtliche* Strahlen des Büschels p_2, welches im Träger π_1 des ebenen Systems liegt, gehen durch ihre homologen Punkte auf $p_3 p_4$. — *Keine absolute Invariante.*

10. $[\overset{\circ}{3}1]$: $c_3 x_4 u_4 + x_1 u_2 + x_2 u_3 = 0$.

Auch hier liegt der Mittelpunkt p_3 des Bündels im Träger π_1 des zu ihm collinearen ebenen Systems; aber es entspricht dem in π_2 liegenden Strahlenbüschel p_3 eine *durch* p_3 *gehende* Punktreihe auf $p_3 p_4$. Dem Strahle $p_3 p_4$ von p_3 entspricht ein von p_3 *verschiedener* Punkt p_4 der Punktreihe. *Keine absolute Invariante.*

11. $[\overset{\circ}{4}]$: $x_1 u_2 + x_2 u_3 + x_3 u_4 = 0$.

Wie 10, aber dem in der singulären Ebene π_1 liegenden Strahlenbüschel mit dem Scheitel p_4 entspricht die durch p_4 gehende Punktreihe auf dem Träger $p_3 p_4$ derart, *dass dem Strahle* $p_3 p_4$ *des Büschels* p_4 *der Punkt* p_4 *der Punktreihe zugeordnet ist.* — *Keine absolute Invariante.*

b) Singuläre Collineationen zweiter Species.

Die Klassen der singulären Collineationen zweiter Species sind die *Klassen der projektiven Beziehungen zwischen einem Ebenenbüschel und einer geraden Punktreihe desselben räumlichen Systems* (100). Was die Fundamentalgebilde bez. der singulären Gebilde anbelangt, so vergleiche man die betreffenden Klassen in III, α), deren Collineationen dieselbe Art der Vertheilung der Fundamentalgebilde zeigen (104, Schluss). Wir haben folgende Fälle zu unterscheiden:

1. $[11\overset{\circ}{1}\overset{\circ}{1}]$: $c_1 x_1 u_1 + c_2 x_2 u_2 = 0$.

Die Axe $p_3 p_4$ des Ebenenbüschels trifft den Träger $p_1 p_2$ der zu ihm projektiven Punktreihe *nicht*; zwei Punkte p_1 und p_2 der Punktreihe liegen in den homologen Ebenen des Büschels. — *Eine absolute*

Invariante: Das Doppelverhältniss, welches zwei homologe Punkte x, x' und die Schnittpunkte der Geraden $x x'$ mit den Ebenen $p_1 p_3 p_4$ und $p_2 p_3 p_4$ bestimmen. —

$$2.\ [2\mathring{1}\mathring{1}]:\ c_1(x_1 u_1 + x_2 u_2) + x_1 u_2 = 0.$$

Wie 1, aber es liegt nur *ein* Punkt p_2 der Punktreihe in der homologen Ebene π_1 des Büschels.

$$3.\ [(11)\mathring{1}\mathring{1}]:\ x_1 u_1 + x_2 u_2 = 0.$$

Die Beziehung zwischen Ebenenbüschel und Punktreihe ist eine *perspektive.*

$$4.\ [\mathring{2}\mathring{1}1]:\ c_3 x_4 u_4 + x_1 u_2 = 0.$$

Die Axe $p_2 p_3$ des Ebenenbüschels *schneidet* den Träger $p_2 p_4$ der geraden Punktreihe; der Ebene $p_2 p_3 p_4$ des Büschels entspricht der vom Schnittpunkte p_2 *verschiedene* Punkt p_4 der Punktreihe.

$$5.\ [\mathring{3}\mathring{1}]:\ x_1 u_2 + x_2 u_3 = 0.$$

Wie 4, aber der von der Axe $p_3 p_4$ des Büschels und dem Träger $p_2 p_3$ der Punktreihe bestimmten Ebene $p_2 p_3 p_4$ entspricht der *Schnittpunkt* p_3 *von Axe und Träger.*

$$6.\ [\mathring{2}\mathring{2}]:\ x_1 u_2 + x_3 u_4 = 0.$$

Die Axe $p_2 p_4$ des Büschels und der Träger $p_2 p_4$ der Punktreihe *fallen zusammen. In den Fällen 2—6 treten keine absoluten Invarianten auf.*

c) Singuläre Collineationen dritter Species.

$$1.\ [1\mathring{1}\mathring{1}\mathring{1}]:\ x_1 u_1 = 0.$$

Die Ebene $\pi_1 = p_2 p_3 p_4$, deren *sämmtliche* Punkte singuläre Punkte sind, enthält *nicht* den Punkt p_1, welcher Träger eines *Bündels singulärer Ebenen* ist. (Vergl. III, α) unter 12 und 104, Schluss.) Allen nicht auf π_1 liegenden Punkten des Raumes R entspricht *derselbe* Punkt p_1 von R', u. s. w. (99).

$$2.\ [\mathring{2}\mathring{1}\mathring{1}]:\ x_1 u_2 = 0.$$

Der Träger p_2 des Bündels singulärer Ebenen liegt *in* der Ebene π_1 der singulären Punkte. (Vergl. III, α) unter 13 und 104, Schluss.)

*Die Collineationen dieser Species haben keine absoluten Invarianten.**

---

* Wir stellen hier noch eine Reihe von Anwendungen der E T auf *geometrische Probleme* zusammen. Von Anwendungen der Weierstrass'schen Theorie sind zu nennen: Klein, Ueber die Transf. der allg. Gleichung 2ten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine kanonische Form, Inauguraldiss., Berlin 1868. (Abgedruckt in Math. Ann. Bd. 23.) Killing, Der Flächenbüschel 2ter Ordnung, Inauguraldiss., Berlin 1872. Weiler, Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe 2ten Grades, Math. Ann. (73) Bd. 7. Gundelfinger in Hesse's Vorl.

§ 18. Systeme aus ganzen oder gebrochenen Grössen eines Körpers.

106. Wir haben bisher nur solche Systeme betrachtet, deren Elemente *ganze Grössen* eines Körpers von Zahlen oder Funktionen waren. Zum Schlusse wollen wir nun auch solche Systeme heranziehen, deren Elemente *ganze oder gebrochene Grössen* eines Körpers vorstellen, den Begriff „ET“ auch auf diese Systeme ausdehnen und eine Reihe von früher gefundenen Sätzen über ET auch für Systeme dieser Art beweisen.

Wir beginnen mit Systemen aus *rationalen Zahlen* und schicken folgende Bemerkungen voraus:

Die rationale Zahl a heisst durch die rationale Zahl b $(\gtrless 0)$ theilbar (b heisst in a enthalten, a ein Vielfaches von b), wenn $\frac{a}{b}$ eine *ganze* Zahl ist. Sind $a_1, a_2, \ldots a_k$ rationale Zahlen, so ist jeder gemeinsame Theiler dieser k Zahlen in einer Zahl D enthalten, die der grösste gemeinschaftliche Theiler* derselben genannt wird. Man findet D, wie folgt: Man denke sich die unter a_i enthaltenen Brüche reducirt, jede der von Null verschiedenen Zahlen a_i als ein Produkt von Primzahlen mit positiven oder negativen Exponenten dargestellt und nehme in D jede dieser Primzahlen so oft als Faktor auf, als sie in den k Zahlen a_i *mindestens* vorkommt.

D ist offenbar nichts anderes als der *grösste gemeinschaftliche Theiler* aller Zähler der reducirten Brüche und der ganzen Zahlen unter den a_i, dividirt durch das *kleinste gemeinschaftliche Vielfache* der

---

über analyt. Geom. des Raumes, 3. Auflage, 1876, IV. Suppl. Voss, Die Liniengeom. in ihrer Anw. auf die Flächen 2ten Grades, Math. Ann. (76) Bd. 10. Loria, Geometria della sfera, Mem. della Ac. delle Scienze di Torino 1884, Ser. 2, Tom. 36. Segre, Studio sulla quadriche in uno spazio lin. ad un num. qual. di dimens. u. Sulla geometria della retta etc. a. eben cit. O. M. Bôcher, Ueber die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie, Leipzig 1894 (Capitel III). — Eine geometrische Anwendung der Theoreme XXVIII und XXIX giebt Segre, Ricerche sulle omogr. e sulle correl. in generale u. s. w. Mem. della Ac. delle Scienze di Torino (85), Ser. II, Tom. 37 (§ 1 und 2). Ebendaselbst § 3 und § 4 giebt derselbe eine Anwendung der Kronecker'schen Untersuchungen über die congruenten Transf. der bil. Formen (vergl. oben § 10). — Die Kronecker'schen Untersuchungen über singuläre Schaaren — allerdings nicht in der erst 1890 abgeschlossenen Gestalt (vergl. § 8 oben) — benutzen Killing a. c. O. und Segre, Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spez. l. qual. Atti della R. Acad. delle Scienze di Torino (84), Vol. XIX. — Endlich finden die ET Anwendung beim Hauptaxenprobleme. Vergl. Gundelfinger-Dingeldey, Vorl. a. d. anal. Geom. der Kegelschnitte, Leipzig 1895, § 8 und § 10.

* Vergl. zum Folgd. Hensel, Crelle's Journ. (96) Bd. 115, S. 254 ff.

auftretenden Nenner; D ist demnach durch den Euklidischen Algorithmus *direkt bestimmbar*.

D ist dann und nur dann eine ganze Zahl, wenn alle a_i ganze Zahlen sind.

Unter $\mathfrak{R}$ wollen wir im Folgenden stets ein System verstehen, dessen n^2 Elemente *rationale* Zahlen sind; ist r der Rang eines Systems $\mathfrak{R}$, so soll der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Subdeterminanten ϱ^{ten} Grades von $\mathfrak{R}$ $(\varrho \leqq r)$ allgemein mit $D_\varrho(\mathfrak{R})$ bezeichnet werden.

Wir bilden für ein gegebenes $\mathfrak{R}$ die Zahlen

$$D_\varrho(\mathfrak{R}) \quad (\varrho = 1, 2 \ldots r),$$

setzen

$$E_1(\mathfrak{R}) = D_1(\mathfrak{R}), \quad E_2(\mathfrak{R}) = \frac{D_2(\mathfrak{R})}{D_1(\mathfrak{R})}, \cdots E_r(\mathfrak{R}) = \frac{D_r(\mathfrak{R})}{D_{r-1}(\mathfrak{R})},$$

ferner

$$E_{r+1}(\mathfrak{R}) = \cdots = E_n(\mathfrak{R}) = 0$$

und nennen $E_1(\mathfrak{R}), E_2(\mathfrak{R}), \ldots E_n(\mathfrak{R})$ bez. den **ersten, zweiten, ...** n^{ten} **Elementartheiler** von $\mathfrak{R}$. Zerlegt man $E_1(\mathfrak{R}), E_2(\mathfrak{R}) \ldots E_r(\mathfrak{R})$ in Faktoren, die Potenzen verschiedener Primzahlen (mit positiven oder negativen Exponenten) sind, so heisst jede solche Primzahlpotenz ein **einfacher Elementartheiler** von $\mathfrak{R}$; $E_1(\mathfrak{R}), E_2(\mathfrak{R}), \ldots E_n(\mathfrak{R})$ dagegen sollen als die **zusammengesetzten Elementartheiler** von $(\mathfrak{R})$ bezeichnet werden (4). Den ϱ^{ten} ET eines Systems $\mathfrak{R}$ bezeichnen wir allgemein mit $E_\varrho(\mathfrak{R})$.

Nun sei $\overline{\mathfrak{R}}$ ein zweites System aus n^2 rationalen Zahlen, und zwar sei $\overline{\mathfrak{R}}$ aus $\mathfrak{R}$ dadurch hervorgegangen, dass $\mathfrak{R}$ mit Systemen aus je n^2 *ganzen* Zahlen in beliebiger Weise vorn und hinten componirt wurde (11). Dann heisst $\overline{\mathfrak{R}}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{R}$.

Ist $\overline{\mathfrak{R}}$ Vielfaches von $\mathfrak{R}$, so ist der Rang r' von $\overline{\mathfrak{R}}$ kleiner als der Rang oder gleich dem Range r von $\mathfrak{R}$, also

$$r' \leqq r;$$

ferner ist $D_\varrho(\overline{\mathfrak{R}})$ durch $D_\varrho(\mathfrak{R})$ für $\varrho = 1, 2, \ldots r'$ theilbar. Dieses beweist man genau so, wie bei ganzzahligen Systemen in 24.

Ist $\overline{\mathfrak{R}}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{R}$, zugleich aber auch $\mathfrak{R}$ ein Vielfaches von $\overline{\mathfrak{R}}$, so heissen die Systeme $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ äquivalent. Sind $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ äquivalent, so ist nach Vorstehendem

$$r' = r, \quad D_\varrho(\overline{\mathfrak{R}}) = D_\varrho(\mathfrak{R}) \text{ für } \varrho = 1, 2, \ldots r,$$

also auch

$$E_\varrho(\overline{\mathfrak{R}}) = E_\varrho(\mathfrak{R}) \text{ für } \varrho = 1, 2, \ldots n.$$

Die Sätze 8a) und 8b) in 25 *gelten also auch für Systeme* $\mathfrak{R}$.

107. Ein (reducirter) Bruch heisst in Bezug auf eine bestimmte Primzahl p (modulo p, mod. p) ganz, wenn sein Nenner nicht durch p theilbar ist. Ist der Quotient $\frac{a}{b}$ zweier rationalen Zahlen a und b $(b \neq 0)$ eine mod. p ganze Zahl, so heisst a durch b mod. p theilbar (a ein Vielfaches von b mod. p, u. s. w.). Ist weder der Zähler, noch

der Nenner eines reducirten Bruches a durch die Primzahl p theilbar, so sagen wir, a sei mod. p gleich Eins. Endlich heissen zwei rationale Zahlen $(\lessgtr 0)$ mod. p gleich, wenn ihr Verhältniss mod. p gleich Eins ist.

Nimmt man mit mod. p ganzen rationalen Zahlen irgendwelche ganze Operationen vor, so ist die resultirende Zahl ebenfalls mod. p ganz.

Entsteht ein System $\overline{\mathfrak{R}}$ aus einem Systeme $\mathfrak{R}$ dadurch, dass letzteres System mit Systemen aus mod. p ganzen Zahlen irgendwie vorn und hinten zusammengesetzt wird, so heisst $\overline{\mathfrak{R}}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{R}$ in Bezug auf die Primzahl p (mod. p). Ist mod. p $\overline{\mathfrak{R}}$ Vielfaches von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}$ von $\overline{\mathfrak{R}}$, so heissen $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ mod. p äquivalent. Man beweist analog, wie in 24: *Sind zwei Systeme $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ mod. p äquivalent, so sind ihre zusammengesetzten ET mod. p gleich (so stimmen $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ im Range und den ETn in Bezug auf die Basis p überein).*

Ein System, dessen Elemente mod. p ganze Zahlen sind, und dessen Determinante mod. p gleich Eins ist, heisst ein Einheitssystem in Bezug auf p.

Ist $\mathfrak{R}$ ein derartiges System, so gilt das Gleiche von dem reciproken Systeme $\mathfrak{R}^{-1}$ (S. 27). *Durch Composition mit Einheitssystemen mod. p bleiben die zusammengesetzten ET eines Systems $\mathfrak{R}$ mod. ungeändert* (26).

Wir verstehen unter einer *Elementartransformation a) mod. p* eines Systems $\mathfrak{R}$ die Multiplikation einer Reihe desselben mit einer Zahl, die mod. p gleich Eins ist; multiplicirt man eine Reihe von $\mathfrak{R}$ mit einer mod. p ganzen Zahl und addirt (subtrahirt) sie von einer parallelen Reihe, so soll diese Operation als eine Elementartransformation c) von $\mathfrak{R}$ mod. p bezeichnet werden. Vertauschungen paralleler Reihen heissen Elementartransformationen b). Vergl. 27. *Durch Elementartransformationen mod. p werden die zusammengesetzten ET eines Systems $\mathfrak{R}$ mod. p nicht geändert.* Denn diese Umformungen eines Systems $\mathfrak{R}$ sind gleichbedeutend mit der Composition von $\mathfrak{R}$ mit gewissen Einheitssystemen mod. p. (Siehe oben.) Durch Elementartransformationen b) werden die zusammengesetzten ET von $\mathfrak{R}$ *überhaupt nicht geändert.*

108. Nun sei ein System

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

vom Range r gegeben; durch Elementartransformationen b) bringen wir an Stelle von a_{11} ein Element, welches in allen übrigen Elementen

mod. p enthalten ist, wo wieder p eine beliebige Primzahl bedeutet; das neue System bezeichnen wir wieder, wie das ursprüngliche. Nun multipliciren wir die erste Spalte in $\mathfrak{R}$ mit der mod. p ganzen Zahl $\frac{a_{12}}{a_{11}}$ und subtrahiren sie von der zweiten Spalte. Durch diese Elementartransformation c) mod. p erhalten wir ein zu $\mathfrak{R}$ mod. p äquivalentes System, *in welchem das zweite Element der ersten Zeile Null ist.* Auf analoge Weise machen wir *alle Elemente* der beiden ersten Reihen ausser a_{11} zu Null, wenden dann dasselbe Verfahren auf das System an, welches aus dem umgeformten $\mathfrak{R}$ durch Weglassen der beiden ersten Reihen entsteht, und gelangen schliesslich zu einem *Diagonalsysteme* (28), in welchem die r ersten Elemente $d_1, d_2, \ldots, d_r$ nicht Null sind, die übrigen aber verschwinden, und in welchem d_ϱ durch $d_{\varrho-1}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots r)$ mod. p theilbar ist. Durch Elementartransformationen a) endlich machen wir das letztere System zu

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} p^{e_1} & 0 & 0 & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & p^{e_2} & 0 & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & p^{e_r} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix},$$

wo p^{e_ϱ} *durch* $p^{e_{\varrho-1}}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots r)$ *theilbar ist.* Die Exponenten e_ϱ sind negative oder positive ganze Zahlen oder auch Null.

Für dieses System $\mathfrak{D}$ findet man nun höchst einfach (28)

$$E_1(\mathfrak{D}) = p^{e_1},\ E_2(\mathfrak{D}) = p^{e_2}, \ldots E_r(\mathfrak{D}) = p^{e_r},\ E_{r+1}(\mathfrak{D}) = E_{r+2}(\mathfrak{D}) = \cdots = 0.$$

Nun sind aber $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{D}$ äquivalent mod. p; *also sind die Diagonalelemente in* $\mathfrak{D}$ *bez. dem ersten, zweiten, ...* n^{ten} *ET von* $\mathfrak{R}$ *gleich bez. mod.* p *gleich;* diejenigen Potenzen p^{e_ϱ}, deren Exponenten nicht Null sind, stellen die einfachen ET von $\mathfrak{R}$ in Bezug auf die Basis p vor.

Nach dem eben Gesagten ist mod. p

$$E_\varrho(\mathfrak{R}) = p^{e_\varrho} \quad (\varrho = 1, 2, \ldots r);$$

nun ist aber p^{e_ϱ} durch $p^{e_{\varrho-1}}$ theilbar; also ist $E_\varrho(\mathfrak{R})$ durch $E_{\varrho-1}(\mathfrak{R})$ mod. p theilbar; p war aber eine beliebige Primzahl. Daher ist $E_\varrho(\mathfrak{R})$ durch $E_{\varrho-1}(\mathfrak{R})$ für $\varrho = 1, 2, \ldots r$ theilbar. *Der Fundamentalsatz I gilt mithin auch für Systeme* $\mathfrak{R}$ *aus rationalen Zahlen.*

Ist ein System $\mathfrak{R}$ in die Theile $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zerlegbar, so kann man auf Grund der soeben entwickelten Methode $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ in mod. p äquivalente Diagonalsysteme $\overline{\mathfrak{R}}, \overline{\mathfrak{R}}_1, \overline{\mathfrak{R}}_2$ verwandeln, derart, dass die Diagonalelemente von $\overline{\mathfrak{R}}_1, \overline{\mathfrak{R}}_2, \overline{\mathfrak{R}}$ bez. den zusammengesetzten ETn von $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}$ mod. p gleich sind (32). Bestimmt man nun die ET

von $\overline{\mathfrak{R}}$ in Bezug auf p, so erkennt man, dass die ET von $\overline{\mathfrak{R}}_1$ und $\overline{\mathfrak{R}}_2$ in Bezug auf p zusammengenommen gerade die ET von $\overline{\mathfrak{R}}$ in Bezug auf p ausmachen (31, 32). $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ besitzen aber mod. p dieselben ET, wie $\overline{\mathfrak{R}}$, $\overline{\mathfrak{R}}_1$ und $\overline{\mathfrak{R}}_2$, p ist eine beliebige Primzahl, daher sind die ET von $\mathfrak{R}$ diejenigen von $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ zusammengenommen. *Der Satz V in* 32 *gilt sonach auch für Systeme* $\mathfrak{R}$ *der hier betrachteten Art.*

109. $\mathfrak{R}$ bedeute wieder ein System aus n^2 *ganzen oder gebrochenen* rationalen Zahlen, $\mathfrak{G}$ aber ein System aus n^2 *nur ganzen* Zahlen. Gemäss der symbolischen Gleichung (11)

$$(1) \qquad \overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}\mathfrak{G}$$

entstehe durch Composition der Systeme $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}$ ein System $\overline{\mathfrak{R}}$. $\overline{\mathfrak{R}}$ ist Vielfaches von $\mathfrak{R}$ (106), *es ist aber auch jeder zusammengesetzte ET von* $\overline{\mathfrak{R}}$ *Vielfaches des entsprechenden zusammengesetzten ETs von* $\mathfrak{R}$.*

Um dieses zu beweisen**, verstehen wir unter p wieder eine beliebige Primzahl und verwandeln durch Elementartransformationen in Bezug auf p unser System $\mathfrak{R}$ in ein mod. p äquivalentes Diagonalsystem $\mathfrak{D}$ von der in 108 beschriebenen Art. Man hat dann mod. p

$$E_\varrho(\mathfrak{R}) = E_\varrho(\mathfrak{D}) = p^{e_\varrho} \quad (\varrho = 1, 2, \ldots r),$$

wenn $\mathfrak{R}$ vom Range r ist.

$\mathfrak{D}$ geht aus $\mathfrak{R}$ durch Composition mit Einheitssystemen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ in Bezug auf p hervor; es sei also etwa

$$(2) \qquad \mathfrak{D} = \mathfrak{E}_1 \mathfrak{R} \mathfrak{E}_2.$$

Wegen (1) und (2) ist dann

$$\overline{\mathfrak{D}} = \mathfrak{E}_1 \overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{E}_1 \mathfrak{R} \mathfrak{G} = \mathfrak{E}_1 \mathfrak{R} \mathfrak{E}_2 \mathfrak{E}_2^{-1} \mathfrak{G} = \mathfrak{D} \mathfrak{E}_2^{-1} \mathfrak{G}$$

oder, wenn noch

$$\mathfrak{E}_2^{-1} \mathfrak{G} = \mathfrak{H}$$

gesetzt wird,

$$(3) \qquad \overline{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}\mathfrak{H}.$$

Dabei ist $\mathfrak{H}$ ein System aus mod. p ganzen Zahlen, da die Elemente von $\mathfrak{G}$ absolut, die von $\mathfrak{E}_2^{-1}$ mod. p ganz sind.

Nun ist aber nicht nur $\mathfrak{D}$ zu $\mathfrak{R}$, sondern wegen $\overline{\mathfrak{D}} = \mathfrak{E}_1 \overline{\mathfrak{R}}$ auch $\overline{\mathfrak{D}}$ zu $\overline{\mathfrak{R}}$ mod. p äquivalent. Daher ist mod. p für $\varrho = 1, 2, \ldots n$

$$E_\varrho(\mathfrak{D}) = \mathfrak{E}_\varrho(\mathfrak{R}), \quad E_\varrho(\overline{\mathfrak{D}}) = E_\varrho(\overline{\mathfrak{R}}).$$

Kann man nun zeigen, dass mod. p $E_\varrho(\overline{\mathfrak{D}})$ *Vielfaches von* $E_\varrho(\mathfrak{D})$ *ist, so ist also auch dargethan, dass mod. p* $E_\varrho(\overline{\mathfrak{R}})$ *Vielfaches von* $E_\varrho(\mathfrak{R})$ *ist, und damit*, da p eine beliebige Primzahl war, *unser Satz bewiesen.*

---

* Dass $D_\varrho(\overline{\mathfrak{R}})$ Vielfacher von $D_\varrho(\mathfrak{R})$ ist, ist fast selbstverständlich (**24**).

** Zum folgenden Beweise vergl. Frobenius, SB 1894, S. 42—43.

Um nun zu zeigen, dass $E_\varrho(\overline{\mathfrak{D}})$ Vielfaches von $E_\varrho(\mathfrak{D})$ ist mod. p, verfahren wir so: wir bezeichnen die Elemente von $\mathfrak{H}$ mit h_{ik}, setzen also etwa

$$\mathfrak{H} = \begin{pmatrix} h_{11} \dots h_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ h_{n1} \dots h_{nn} \end{pmatrix};$$

dann wird wegen (3)

$$\overline{\mathfrak{D}} = \begin{pmatrix} p^{e_1} h_{11} & p^{e_1} h_{12} \dots p^{e_1} h_{1n} \\ p^{e_2} h_{21} & p^{e_2} h_{22} \dots p^{e_2} h_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p^{e_r} h_{r1} & p^{e_r} h_{r2} \dots p^{e_r} h_{rn} \\ 0 \quad . & \dots \quad 0 \quad . \quad . \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 \quad . & \dots \quad 0 \quad . \quad . \end{pmatrix}.$$

Der Rang r' von $\overline{\mathfrak{D}}$ ist $\leqq r$. Bedeutet ϱ eine der Zahlen $1, 2, \dots r'$, so wollen wir unter $\overline{S}_\varrho$ eine Subdeterminante ϱ^{ten} Grades des Systems $\overline{\mathfrak{D}}$ verstehen. Enthält $\overline{S}_\varrho$ die $a^{\text{te}}, b^{\text{te}}, \dots m^{\text{te}}$ Zeile von $\overline{\mathfrak{D}}$, und ist $a < b < \dots < m$, so ist $a \geqq 1$, $b \geqq 2, \dots m \geqq \varrho$; daher wird p^{e_a} durch p^{e_1}, p^{e_b} durch $p^{e_2}, \dots p^{e_m}$ durch p^{e_ϱ} theilbar sein, weil $e_1 \leqq e_2 \leqq \dots \leqq e_r$ ist (106). In der Determinante $\overline{S}_\varrho$ sind daher, weil die h_{ik} mod. p ganze Zahlen sind, alle Elemente der ersten Zeile durch p^{e_1}, der zweiten durch $p^{e_2}, \dots$ der ϱ^{ten} durch p^{e_ϱ} theilbar mod. p. Führt man diese Divisionen aus, so erhält man eine Determinante R_ϱ, welche die der Determinante $\overline{S}_\varrho$ entsprechende *reducirte Determinante* genannt werden soll. Die Elemente von R_ϱ sind mod. p ganze Zahlen, und es ist

$$\overline{S}_\varrho = p^{e_1+e_2+\dots+e_\varrho} R_\varrho.$$

Jetzt denken wir uns für ein bestimmtes ϱ alle zu den $\overline{S}_\varrho$ gehörigen reducirten Determinanten R_ϱ hingeschrieben und bezeichnen den grössten gemeinsamen Theiler aller Determinanten R_ϱ mit D_ϱ. Dann hat man

$$D_\varrho(\overline{\mathfrak{D}}) = p^{e_1+e_2+\dots+e_\varrho} D_\varrho,$$

$$D_\varrho = \frac{D_\varrho(\overline{\mathfrak{D}})}{p^{e_1+e_2+\dots+e_\varrho}},$$

für $\varrho = 1, 2, \dots r'$. Daher ist

$$D_{\varrho-1} = \frac{D_{\varrho-1}(\overline{\mathfrak{D}})}{p^{e_1+e_2+\dots+e_{\varrho-1}}}.$$

Entwickelt man aber eine der Determinanten R_ϱ nach den Subdeterminanten der Elemente der *letzten* Zeile, so enthält jedes Glied des Aggregats eine reducirte Determinante $R_{\varrho-1}$ als Faktor; die betrachtete Determinante ist also durch $D_{\varrho-1}$ mod. p theilbar, da ihre Elemente mod. p ganze Zahlen sind. Alle Determinanten R_ϱ sind durch $D_{\varrho-1}$ theilbar mod. p, also ist es auch ihr grösster gemeinschaftlicher Theiler D_ϱ, d. h. es ist

$$\frac{D_\varrho}{D_{\varrho-1}} = \frac{D_\varrho(\overline{\mathfrak{D}})}{D_{\varrho-1}(\overline{\mathfrak{D}})} \cdot \frac{1}{p^{e_\varrho}} = \frac{E_\varrho(\overline{\mathfrak{D}})}{p^{e_\varrho}}$$

eine mod. p ganze Zahl. Nun ist aber mod. p

$$\frac{E_\varrho(\overline{\mathfrak{D}})}{p^{e_\varrho}} = \frac{E_\varrho(\overline{\mathfrak{D}})}{E_\varrho(\mathfrak{D})},$$

also ist $\frac{E_\varrho(\overline{\mathfrak{D}})}{E_\varrho(\mathfrak{D})}$ eine mod. p ganze Zahl, w. z. b. w. —

Wären wir statt von der Gleichung (1) von der Gleichung

$$\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{G}\mathfrak{R}$$

ausgegangen, so wären wir zu demselben Resultate gelangt.

Sind nun $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \ldots \mathfrak{L}, \mathfrak{M} \ldots$ Systeme aus ganzen Zahlen, und besteht eine Gleichung

$$\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{G}\mathfrak{H} \ldots \mathfrak{R}\mathfrak{L}\mathfrak{M} \ldots,$$

so folgt aus ihr eine Gleichung

$$\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{A}\mathfrak{R}\mathfrak{B},$$

wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}\mathfrak{H} \ldots$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{L}\mathfrak{M} \ldots$ gesetzt wird. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind Systeme aus ganzen Zahlen. Daher ist nach dem Vorhergehenden $E_\varrho(\mathfrak{R}\mathfrak{B})$ Vielfaches von $E_\varrho(\mathfrak{R})$, $E_\varrho(\mathfrak{A}\mathfrak{R}\mathfrak{B})$ Vielfaches von $E_\varrho(\mathfrak{R}\mathfrak{B})$, und folglich $E_\varrho(\mathfrak{A}\mathfrak{R}\mathfrak{B}) = E_\varrho(\overline{\mathfrak{R}})$ Vielfaches von $E_\varrho(\mathfrak{R})$. Also gilt der Satz (106):

Ist ein System $\overline{\mathfrak{R}}$ Vielfaches eines Systems $\mathfrak{R}$, so ist jeder zusammengesetzte Elementartheiler von $\overline{\mathfrak{R}}$ Vielfaches des entsprechenden zusammengesetzten Elementartheilers von $\mathfrak{R}$.

Der Satz bleibt seiner Herleitung nach übrigens auch giltig, wenn man für „Vielfaches“ überall „Vielfaches mod. p“ schreibt.

110. Vorstehende Entwickelungen über Systeme aus ganzen oder gebrochenen Zahlen bleiben vollständig bestehen, wenn man unter $\mathfrak{R}$ ein System aus *ganzen oder gebrochenen Funktionen einer Variabelen*, unter p eine lineare Funktion versteht. Auch hier können die zusammengesetzten ET mit Hilfe des Euklidischen Theilverfahrens, also *rational* bestimmt werden.

Dieses letztere bleibt zwar nicht mehr richtig, wenn man unter $\mathfrak{R}$ ein System aus *ganzen oder gebrochenen Funktionen mehrerer Variabelen* oder *aus ganzen oder gebrochenen Grössen eines Körpers von Zahlen oder Funktionen*, unter p eine irreducibele Funktion bez. einen wirklichen oder idealen Primtheiler versteht, im Uebrigen aber bleibt *alles wörtlich bestehen.* Als besonders wichtig wollen wir obigen Satz über componirte Systeme noch in seiner ganzen Allgemeinheit aussprechen. Er lautet:

XLI. Ist ein System $\overline{\mathfrak{R}}$ aus ganzen oder gebrochenen Grössen eines Körpers von algebraischen Zahlen oder Funktionen Vielfaches eines Systems $\mathfrak{R}$ gleicher Art, so ist jeder zusammengesetzte Elementartheiler von $\overline{\mathfrak{R}}$ Viel-

faches des entsprechenden zusammengesetzten Elementartheilers von $\mathfrak{R}$.*

Dieses Theorem *ist nur dann umkehrbar*, wenn die Systeme $\mathfrak{R}$ und $\overline{\mathfrak{R}}$ aus *lauter ganzen Zahlen* oder *ganzen Funktionen einer Variabelen* bestehen (29, 34). *In allen anderen Fällen* ist dasselbe, wie man nach Analogie der Ausführungen in 29 höchst einfach nachweist, *nur mod. p umkehrbar*, wo p eine irreducibele Funktion bez. einen wirklichen oder idealen Primtheiler vorstellt. Man kann also in diesen Fällen nur sagen: Ist der ϱ^{te} E T von $\overline{\mathfrak{R}}$ Vielfaches des ϱ^{ten} E T von $\mathfrak{R}$, so ist *mod. p* $\overline{\mathfrak{R}}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{R}$, wo p einen *beliebigen* Primtheiler vorstellt. Es besteht also hier eine *Lücke*, deren Ausfüllung als sehr wünschenswerth erscheint.

Das Theorem XLI findet wichtige Anwendungen in der Theorie der algebraischen Funktionen.** Ueberhaupt aber sind die in diesem Paragraphen dargelegten Methoden diejenigen, welche sich für die Weiterentwickelung der Theorie der Elementartheiler von ausschlaggebender Bedeutung erweisen dürften.

Anhang.

Zu Artikel 72.

Es sei S eine *symmetrische*, T eine *alternirende* bilineare Form von je $2n$ Variabelen, $|\lambda_1 S + \lambda_2 T| \equiv 0$,

$$\frac{\partial(\lambda_1 S + \lambda_2 T)}{\partial y_i} = U_i, \quad \frac{\partial(\lambda_1 S + \lambda_2 T)}{\partial x_i} = V_i,$$

und es bestehe die lineare Relation

$$a_1 U_1 + a_2 U_2 + \cdots + a_n U_n = 0$$

zwischen den U_i, in welcher die a_i vom Grade g in $\lambda_1 | \lambda_2$ seien. Dieselbe geht, wenn wir in ihr

$$\lambda_1 = \lambda_1, \quad \lambda_2 = -\lambda_2, \quad x_i = y_i$$

setzen, in eine Relation

$$a_1' V_1 + a_2' V_2 + \cdots + a_n' V_n = 0$$

zwischen den V_i über; die a_i' sind ebenfalls vom Grade g in $\lambda_1 | \lambda_2$. Daraus folgt unmittelbar, dass für eine singuläre Schaar $\lambda_1 S + \lambda_2 T$ *die Minimalgradzahlen* m_i und $\overline{m}_i$ (S. 108) übereinstimmen.

Es bedeute S_ϱ eine Subdeterminante ϱ^{ten} Grades von $|\lambda_1 S + \lambda_2 T|$. Durch die Substitution $\lambda_1 = \lambda_1$, $\lambda_1 = -\lambda_2$ geht S_ϱ in eine andere Subdeterminante ϱ^{ten} Grades von $|\lambda_1 S + \lambda_2 T|$ über. Tritt daher der lineare

* Vergl. Hensel, Crelle's Journ. (94) Bd. 114, S. 109 ff. und (96) Bd. 115, S. 259—260. Obiges Theorem schliesst das Theorem II des Artikels 8 als Specialfall in sich. Die Sätze 1) und 2) in 5 kann man auch für Systeme der in obigem Theoreme beschriebenen Art beweisen. Vergl. Hensel, Crelle's Journ. (94) Bd. 114, S. 25 ff.

** Vergl. den Schluss der Einleitung dieses Buches.

Theiler $a\lambda_1 + b\lambda_2$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ in allen S_ϱ zur Potenz l auf, so sind auch alle S_ϱ durch $(a\lambda_1 - b\lambda_2)^l$ theilbar. Hieraus folgt, dass jedem ET $(a\lambda_1 + b\lambda_2)^e$ ein ET $(a\lambda_1 - b\lambda_2)^e$ des Systems von $|\lambda_1 S + \lambda_2 T|$ entspricht. Mithin lautet unser Theorem XVII, S. 140 vollständig so:

XVII. Ist S eine symmetrische, T eine alternirende bilineare Form von je $2n$ Variabelen, so stimmen

(bei $|\lambda_1 S + \lambda_2 T| \equiv 0$)

die Minimalgradzahlen m_i und $\overline{m}_i$ der Schaar $\lambda_1 S + \lambda_2 T$ überein; es entspricht ferner jedem Elementartheiler $(a\lambda_1 + b\lambda_2)^e$, wenn $a \neq 0$, $b \neq 0$ ist, ein Elementartheiler $(a\lambda_1 - b\lambda_2)^e$ des Systems von $|\lambda_1 S + \lambda_2 T|$; die Elementartheiler desselben von der Gestalt $\lambda_1^{2\varkappa}$ und $\lambda_2^{2\varkappa+1}$ aber sind stets paarweise vorhanden.

Ist nun A eine beliebige bilineare Form von $2n$ Variabelen, so setzt man

$$A + A' = S,\quad A - A' = T,\quad \lambda_1 = \lambda_1' + \lambda_2',\quad \lambda_2 = \lambda_1' - \lambda_2',$$

sodass

$$\lambda_1 A + \lambda_2 A' = \lambda_1' S + \lambda_2' T$$

wird, und folgert das Theorem XIX, S. 145 unmittelbar aus XVII oben.

Indem man ferner von dem Schema S. 140 ausgeht, bildet man Formen

$$S_i^0 = T_i^0 + T_i'^0,\quad A_i^0 = T_i^0 - T_i'^0,$$
$$S_\sigma = T_\sigma + T_\sigma',\quad A_\sigma = T_\sigma - T_\sigma',$$

u. s. w.; hier ist immer die erste eine *symmetrische*, die zweite eine *alternirende* Form. Die Schaar $\lambda_1 S_i^0 + \lambda_2 A_i^0$ besitzt nur *eine* Kronecker-sche Invariante $n_i^0 = \overline{n}_i^0 = 2m_i + 1$, ihr Koefficientensystem *keinen* ET. Dies folgt aus dem S. 146 unter 1. Gesagten, da für

$$\lambda_1' = \lambda_1 + \lambda_2,\quad \lambda_2' = \lambda_1 - \lambda_2,$$
$$\lambda_1 S_i^0 + \lambda_2 A_i^0 = \lambda_1' T_i^0 + \lambda_2' T_i'^0$$

wird. Analog erkennt man, dass die Determinante der Schaar $\lambda_1 S_\sigma + \lambda_2 A_\sigma$ die ET

$$[\lambda_1(1 + c) + \lambda_2(1 - c)]^{e_\sigma},\quad [\lambda_1(1 + c) - \lambda_2(1 - c)]^{e_\sigma}$$

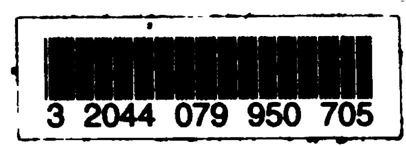
besitzt, wo $1 + c \neq 0$, $1 - c \neq 0$ ist. U. s. w.

Daraus geht hervor, dass man Schaaren $\lambda_1 S + \lambda_2 T$, mit *symmetrischem* S und *alternirendem* T bilden kann, welche von einer gegebenen Anzahl von Variabelenpaaren abhängen und — im Sinne des Theorems XVII oben — *vorgeschriebene* Kronecker'sche *und* Weierstrass'sche *Invarianten* besitzen (vergl. S. 147). Man erkennt dann weiter, dass obige Schaaren $\lambda_1 S_i^0 + \lambda_2 A_i^0$, $\lambda_1 S_\sigma + \lambda_2 A_\sigma$ u. s. w. bei *congruenter Transformation* der Variabelen irreducibel sind. (Vergl. S. 147—148.) Damit ist denn schliesslich *die Reduktion einer Schaar* $\lambda_1 S + \lambda_2 T$ *bei congruenter Transformation der Variabelen* wegen des Satzes 18) S. 135 vollständig erledigt. (Vergl. S. 148.)

Index.

Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.


3 2044 079 950 705